

2026 年 6 月

平滑推移モデルによる自然利子率 r^* の推定

川村 匠¹ 沖本 竜義² 渡辺 桂士³

¹ 調査数理部

² 慶應義塾大学

³ 調査数理部

本稿の執筆にあたり、植田 博信氏及び GPIF スタッフから有益なコメントを頂戴した。記して感謝の意を表したい。

GPIF 学術支援シリーズは、GPIF 職員および外部研究者の進行中の研究成果をとりまとめたものであり、内外の研究機関・研究者等の有識者から幅広くコメントを頂戴することを意図しています。したがって、結果は今後改定されうものです。論文の中で示された内容や意見は、現時点で信頼できると考えられる情報を基に作成しておりますが、情報の正確性や完全性を保証するものではなく、本稿中に誤りはすべて筆者に帰属します。また、必ずしも GPIF の見解を反映しているとは限りません。GPIF 学術支援シリーズに掲載した各スタンダード、フレームワーク、ガイドライン及びメソドロジーに関する著作権、商標権、知的財産権その他一切の権利は、それぞれの公表元またはその許諾者に帰属しますのでご注意ください。なお、GPIF 学術支援シリーズに対するご意見・ご質問や、掲載ファイルに関するお問い合わせ、または商用目的で転載・複製を行う場合は、予め GPIF 企画部（Tel：03-3502-2486）までご相談下さい。転載・複製を行う場合は、出所を明記して下さい。

平滑推移モデルによる自然利子率 r^* の推定

川村 匠^{*} 沖本 竜義[†] 渡辺 桂士[‡]

要旨

本稿は、日米データを用いて自然利子率 (r^*) を推定し、レジーム変化が推定結果に与える影響を分析する。既存の Holston-Laubach-Williams (HLW) 型状態空間モデルでは、自然利子率の低頻度変化はランダムウォーク型ショックの累積として表現されるため、その変化が滑らかな長期トレンドなのか、あるいは構造的なレジーム変化なのかを明示的に区別することが難しい。また近年では、観測変数に対して潜在ショックが過剰となる HLW 型モデルにおいて、自然利子率をデータから一意に回復することが困難であるというショック回復性の問題も指摘されている。このショック回復性の問題を緩和するために、本稿では、HLW の準構造モデルを基礎とし、平滑推移 (Smooth Transition: ST) モデルを導入することで、自然利子率および潜在成長率に低頻度のレジーム変化を許容する代替的なモデルを提案する。これにより、潜在ショックの回復に依存せず、自然利子率の長期的な構造変化を直接推定する枠組みを提示する。推定結果からは、日米いずれにおいても、サンプル初期に高水準であった自然利子率が長期的に低下するという先行研究で報告されている傾向が確認された。一方で、レジーム変化のタイミングと推移速度には両国で顕著な違いが存在することが示唆された。特に日本では、バブル崩壊前後に対応する時期に急激なレジーム移行が推定され、短期間で大きな構造変化が生じた可能性が確認された。以上の結果は、自然利子率の低頻度変化を滑らかなレジーム変化として捉えることの重要性を示すとともに、自然利子率低下の形状や転換時期に関する新たな実証的含意を与えるものである。

^{*} GPIF 調査数理部

[†] 慶應義塾大学

[‡] GPIF 調査数理部。著者名はアルファベット順に記載している。

1 導入

近年、自然利子率（natural rates of interest）は、金融政策の評価やマクロ経済の長期的な動向を理解する上で、大きな注目を集めている。米国では、パンデミック後の高インフレ局面を経て金融引き締めが進む中、財政赤字の拡大や政府債務の持続可能性に対する懸念と相まって、連邦準備制度（Fed）の金利政策に対する政治的・社会的関心が高まっている。このような状況下で、政策金利が景気に対して引き締めのものか緩和的なものか、それとも中立的な水準に近いのかを判断する基準として、自然利子率が重要な指標として位置付けられている。

一方、日本においても自然利子率への関心は高まっている。バブル経済崩壊以降、日本経済は長期にわたり低成長・低インフレ環境に直面し、金融政策は事実上のゼロ金利制約の下で運営されてきた。しかし近年、物価動向や金融環境の変化を背景に、日本銀行は大規模金融緩和政策からの転換を模索しており、日本経済はバブル崩壊以降初めて本格的な利上げ局面を迎えている。このような政策転換期において、現在の金融政策スタンスを評価するためには、日本における自然利子率の水準やその長期的な推移を把握することが不可欠である。

こうした背景の下、自然利子率を推定するための実証的手法は数多く提案されてきた。中でも、[Laubach and Williams \(2003\)](#)（以下 LW という。）および [Holston et al. \(2017\)](#)（以下 HLW という。）に代表される HLW 型の状態空間（State Space、以下 SS という。）モデルは、自然利子率と潜在成長率を潜在変数として同時に推定する枠組みを提供し、政策実務および学術研究の双方において広く用いられてきた。このアプローチでは、IS 曲線およびフィリップス曲線を用い、インフレ率とアウトプット

ギャップが安定する水準における均衡実質金利として、自然利子率の時系列を推定しており、米国を含む主要国で自然利子率が低下していることを確認している。HLW 型モデルによる推定結果は、異なるデータや理論的枠組みを用いた学術研究によっても広く支持されている。例えば、[Johannsen and Mertens \(2021\)](#) は、ゼロ金利制約を明示的に考慮した未観測成分モデルを用い、実質金利のトレンドを推定し、それを自然利子率に対応する低頻度成分と解釈している。推定結果は、近年において実質金利のトレンドがやや低下していることを示唆するものの、その変化は統計的に有意なものではないとしている。また、[Del Negro et al. \(2017\)](#) ならびに [Del Negro et al. \(2019\)](#) は、モデルの内生変数が共通の確率トレンドを有する SS 型 VAR モデルを用い、実質金利の低頻度成分を自然利子率の長期的動きと解釈することで、米国を含む先進国における自然利子率の低下を示している。

これらの研究により、国際的に自然利子率が低下してきたという認識は共有されつつある。一方で、代表的な SS 型モデルの枠組みでは、自然利子率あるいはそれに対応する実質金利の低頻度成分をランダムウォーク型の確率過程として定式化しており、その変化は未観測ショックの累積として表現される。その結果、自然利子率が緩やかな持続的低下として推移したのか、それとも特定の時期に水準が変化するような構造的転換を経験したのかを、データに基づいて明示的に区別することは容易ではない。また、重要な変化が生じた時点を特定することも困難であり、自然利子率低下の経済的背景や政策的含意を精緻に議論するうえで制約となっている。

この点は、自然利子率の低下という事実そのものよりも、その低頻度変化をどのような構造として理解すべきかという識別上の問題を提起している。実際、HLW 型アプローチに対して、方法論的な観点から重要な問題が指摘されている。具体的には、[Buncic et al. \(2023\)](#) は、HLW を含む多くの自然利子率推定モデルが、観測変数の数

に対して識別すべき潜在ショックが過剰である構造となっている点に着目し、たとえば真のモデルとパラメータが既知であっても、自然利子率をデータから回復することが原理的に困難であることを示している。この問題はショック回復性の欠如として定式化され、推定誤差の大きさやサンプルサイズの制約といった実証上の問題とは本質的に異なる。HLW モデルでは自然利子率および潜在成長率がランダムウォーク過程として定式化されており、その変化は未観測の潜在ショックによって駆動される。しかし、インフレ率やアウトプットギャップといった観測データからは、これらの潜在ショックを一意に回復することができない。その結果、観測データと整合的な自然利子率の時系列とショックの組み合わせが一意に定まらず、推定された自然利子率の系列の変化が、構造的な均衡金利や成長トレンドの変化を反映しているのか、それとも潜在ショックの実現を反映しているのかを判別することができない。Buncic et al. (2023) は、モンテカルロ実験を通じて、推定された自然利子率の変化と真の系列の変化との相関が 0.2 程度と低いことを示し、ショック回復性の欠如の根拠としている。この結果は、推定された自然利子率を「観測データから識別された実証的測定値」として解釈し、その水準や変化に直接的な構造的意味を与えることには慎重であることを示唆している。とりわけ、金融政策の評価や国際比較といった文脈において自然利子率を用いる場合、この方法論的制約には注意が必要である。

Buncic et al. (2023) は、ショック回復性の問題に対する対処として、潜在ショックの回復に依存しない推定手法を検討する必要性を指摘している。その中で、低頻度の変化を確率的トレンドとしてではなく、構造的なレジーム変化として捉えるアプローチの有効性を議論しており、Okimoto (2019) の平滑推移 (Smooth Transition、以下 ST という。) モデルはその具体例として位置付けられている。Okimoto (2019) はショック回復性を明示的に議論してはいないものの、SS モデルで問題となっている

潜在ショックの回復に依存せず、低頻度の緩やかに起こりうるレジーム変化を直接モデル化する点で、[Buncic et al. \(2023\)](#) の問題意識と整合的な実証的枠組みを提供している。

本研究は、以上の問題意識を踏まえ、自然利子率および潜在成長率の推定に対して新たな実証的アプローチを提案する。具体的には、本研究の第 1 の貢献は、HLW 型 SS モデルに内在するショック回復性の問題に対し、自然利子率および潜在成長率の低頻度変化を確率トレンドではなく、ST 型のレジーム変化を許容した長期的なトレンドとして推定することである。これにより、自然利子率を回復不能な潜在ショックの関数として推定するのではなく、長期的なトレンドとして推定する枠組みを提示する。

第 2 の貢献は、自然利子率の長期的低下という既存研究の共通認識に対し、その変化の形状および転換時期を明示的に推定することである。多くの HLW 型推定では、低頻度変化が未観測ショックの累積として表現されるため、重要な変化が生じた時期や、その変化が段階的か急激かといった形状を明示的に特定することが難しい。これに対して ST モデルを用いることで、低頻度変化の形状と転換時期を推定し、自然利子率低下の解釈に新たな実証的インプリケーションを与える。第 3 の貢献は、提案した ST 型モデルを米国および日本の四半期データに応用し、両国における自然利子率および潜在成長率の低頻度推移に関する新たな実証結果を提示することである。これにより、従来の HLW 型の SS モデルに基づく推定とは異なる視点から、金融政策を取り巻く長期的な環境変化を捉えることを目指す。最後の貢献として、成長要因でない安全資産需要であるコンビニエンス・イールドが自然利子率を押し下げるというメカニズムを実証する。

2 先行研究

2.1 自然利子率推計の主要なアプローチ

自然利子率の推計手法は、大きく分けてマクロ経済変数に基づく時系列モデルと、債券市場の情報を用いる期間構造モデルに大別される。本研究が依拠する準構造モデルは、IS 曲線やフィリップス曲線といったマクロ経済学的な構造方程式を仮定し、インフレ率を安定させる均衡実質金利（自然利子率）を、需給ギャップや潜在成長率と同時に推計する手法である。

この分野の先駆的研究として、LW は、IS 曲線およびフィリップス曲線を含む準構造モデルを SS 表現で定式化し、カルマンフィルターを用いて潜在 GDP、需給ギャップ、自然利子率を同時に推計する枠組みを提示した。この枠組みは、観測不可能なトレンド成分を統計的に抽出しつつ、マクロ経済理論との整合性を保つ点で、自然利子率研究の標準的な手法となっている。

HLW は、LW の枠組みを米国、カナダ、ユーロ圏、英国へと拡張し、自然利子率の低下が各国固有の要因のみならず、共通する国際的要因を背景とした現象であることを示した。さらに [Holston et al. \(2023\)](#) は、パンデミック期に観測された極端なデータの振れが自然利子率推計を歪める可能性に着目し、観測誤差分散に柔軟性を持たせることで、外れ値に対する推計のロバスト性を向上させている。

また、[Wynne and Zhang \(2018\)](#) は、LW の枠組みを米国、日本の 2 国間モデルに拡張し、日本と米国の潜在成長率ショックの相関構造を明示的に考慮することで、他国の潜在成長率の変動が自国の自然利子率に影響を及ぼし得ることを示した。この結

果は、自然利子率が必ずしも国内要因のみによって決定されるわけではなく、国際的な実物経済の連関を通じて形成される可能性を示唆している。一方、金融面での不均衡を考慮した拡張として、Belke and Klose (2020) は、ユーロ圏を対象に、LW のモデルに信用成長や資産価格といった金融サイクルの要素を組み込み、実物要因と金融要因の双方を考慮した自然利子率を推計している。

さらに、自然利子率の概念的整理と政策的含意に焦点を当てた研究として、Obstfeld (2023) が挙げられる。同研究は、HLW による自然利子率推計を踏まえ、長期的な均衡値としての自然利子率が、必ずしも短期的な政策の中立利子率と一致しない可能性を指摘し、自然利子率に内在する不確実性を考慮した金融・財政政策判断の重要性を論じている。

日本市場における分析については、日本銀行を中心とした一連の研究が重要な進展を示している。Imakubo et al. (2018) は、マクロ経済変数と債券市場の期間構造を統合した自然イールドカーブの推計枠組み、いわゆる「均衡イールドカーブ」を提示し、自然利子率の影響を単一の指標ではなく、金利の期間構造全体として多角的に捉えることを可能にした。さらに、Nakajima et al. (2023) は、この枠組みに基づく推計結果から、日本の自然利子率の低下が短期的な循環要因にとどまらず、期間構造全体に及ぶ構造的な変化であることを明らかにしている。

理論モデルに基づき、自然利子率の長期低下要因を構造的に説明する研究としては、Gagnon et al. (2021) がある。同研究は、世代重複 (OLG) モデルを用いて人口動態の変化を明示的に組み込み、人口高齢化や労働人口構成の変化といった構造的要因が、長期的な自然利子率の低下をもたらすことを理論的・実証的に裏付けている。

より厳密な経済理論に基づくアプローチとして、動学的確率的一般均衡 (DSGE) モデルを含む構造モデルを用いた自然利子率の推計が挙げられる。これらのモデル

は、経済主体の最適化行動を明示的に記述することで、自然利子率の水準や変動を、統計的なトレンド抽出にとどまらず、構造的な要因から解釈可能にする点に特徴がある。

この分野において、[Barsky et al. \(2014\)](#) は、DSGE モデルに基づき自然利子率の概念的整理を行い、特に景気後退期において自然利子率が大きく変動し得ること、またゼロ金利制約下では自然利子率の推計値と金融政策運営との関係が必ずしも明確でないことを指摘している。同研究は、自然利子率の精緻な点推計よりも、その政策的解釈に内在する不確実性を強調した点に重要な意義がある。

日本経済を対象とした研究としては、[Okazaki and Sudo \(2018\)](#) が、DSGE 型の構造モデルを用いて自然利子率を分析している。彼らは、潜在成長率の低下や家計の時間選好の変化といった構造的要因が、日本における長期的な自然利子率の押し下げ要因となっていることを示しており、人口動態や成長率の変化が自然利子率に与える影響を理論的枠組みの中で明示的に捉えている。

近年では、こうした構造モデルにグローバルな実物要因を組み込む研究も進展している。[Ferreira and Shousha \(2023\)](#) は、他地域における生産性の低下や人口動態の変化といった実物要因を通じたグローバル・スピルオーバーをモデルに組み込み、これらの要因が米国の自然利子率を押し下げてきた可能性を示している。この結果は、自然利子率が国内経済の構造要因のみならず、国際的な実物経済の影響を通じて形成され得ることを示唆している。

同様に、[Carvalho et al. \(2025\)](#) は、不完全な国際資本移動を考慮した構造モデルを用い、世界的な実質金利の長期低下について、人口動態の変容が重要な説明要因であることを示している。彼らの分析は、グローバルな貯蓄・投資バランスの変化が、各国の自然利子率に共通するトレンドをもたらしてきた可能性を示唆するものである。

さらに、日本を含む先進国を対象とした実証分析として、[Hatayama et al. \(2024\)](#) は、世界的な安全資産需給や他国・他地域の実物要因の波及といったグローバルな経済・金融動向を表す変数を自然利子率の説明変数としてモデルに組み込んだ上で、グローバル化の進展に伴い、それらの影響が非線形的に変化する可能性を考慮した平滑推移モデルによる分析を行っている。同研究は、自然利子率の動向を理解する上で、生産性や人口動態といった国内実物要因のみならず、安全資産需給や海外経済の影響といったグローバル要因を勘案することの重要性を示している。

2.2 その他の手法

マクロ経済理論に基づく準構造モデルに加え、金融市場データの特性や長期的な構造変化を重視するアプローチも、自然利子率の推計において広く用いられている。

[Del Negro et al. \(2017\)](#) は、短期金利・長期金利・予想短期金利に共通するトレンドとして自然利子率を抽出すると同時に、流動性や安全資産需要に起因するコンベニエンス・イールド（以下 CY という。）を明示的に分離・同定する枠組みを提示した。同研究は、近年の実質金利低下は単一のマクロ要因ではなく、金融市場固有の要因を含む多面的な要因の結果として説明している点に特徴がある。[Szöke et al. \(2024\)](#) も CY の自然利子率への影響を HLW の準構造モデルの中で論じており、安定資産需給の影響は無視できないとされている。

また、[Kiley \(2020\)](#) は、金利の有効下限（effective lower bound: ELB）や期待インフレのアンカー不全を考慮した SS モデルを構築し、低インフレ・低金利環境下における自然利子率推計の精度向上を図っている。同研究は、低金利環境が長期化する局面では、従来の線形モデルが構造変化を十分に捉えきれず、自然利子率を過大評価する可能性があることを指摘している。

期間構造モデルを用いた分析としては、[Bauer and Rudebusch \(2020\)](#) が、長期金利に内在するトレンド成分（いわゆる “Falling Stars”）を考慮することの重要性を指摘している。彼らは、債券市場の利回り曲線から得られる将来金利に関する情報が、マクロ経済モデルによる自然利子率推計を補完する有効な情報源となり得ることを示した。

日本市場に特有の構造変化に着目した研究としては、[Goy and Iwasaki \(2024\)](#) が挙げられる。彼らは、国内の人口動態の変化に加え、世界的な実質利子率のトレンドとの連動性を明示的にモデルに組み込むことで、日本の自然利子率低下の背景にある構造的要因を分析している。このアプローチは、国際的な資本移動の影響を強く受ける日本経済の特性を踏まえ、国内の生産性要因のみならず、グローバルな貯蓄・投資バランスが国内金利に与える影響を定量的に評価している。

さらに近年では、推計結果の堅牢性を高める手法として、多変量ベヴァリッジ＝ネルソン（Beveridge–Nelson、以下 BN という。）分解の有効性が注目されている。[Morley \(2002\)](#) は、SS モデルを用いることで BN 分解を簡便に実装する手法を提案した。しかし、BN 分解はモデルの誤設定（misspecification）に対して脆弱であるという課題を有していた。これに対し、[Morley et al. \(2024\)](#) は、いわゆる Morley, Tran, and Wong 補正（以下 MTW 補正という。）を提案し、推計されたサイクル成分に残存する予測可能性を事後的にトレンドへ還元することで、トレンドとサイクルの統計的整合性を確保する手法を示している。この修正は、不確実性の高い自然利子率推計における推計誤差を抑制する観点の技術的進展と位置付けられる。

これらの手法を踏まえ、[Morley and Wong \(2025\)](#) は MTW 補正を用いた推計結果から、世界金融危機以降のグローバルな自然利子率の変動を分析している。その結果、米国の自然利子率がグローバルな動向を把握する上で重要な情報を提供する一方

で、各国固有のショックも無視できない寄与を有することを明らかにしている。

2.3 ショック回復性

[Buncic \(2024\)](#) は HLW 型モデルの推定手法に対し、特にフィルタリング手法やパラメータ推定の歪みが自然利子率のトレンド推定に影響を及ぼす可能性を指摘している。同論文はショック回復性の理論的枠組みそのものを構築するものではないが、自然利子率推定に内在する実証上の困難を補完的に示している。

[Buncic et al. \(2023\)](#) は、HLW 型の SS モデルおよびその拡張モデルを含む多くの自然利子率推定が、観測変数に対して識別すべきショックが過剰な構造であることを指摘し、たとえモデルが正しくパラメータが既知であっても、自然利子率をデータから回復することが原理的に困難であると論じている。具体的には、HLW 型の SS モデルを真のモデルとしてシミュレーションを行い、真の自然利子率の変化とモデルから回復した自然利子率の変化の相関が 0.2 前後となることを確認している。シミュレーションにおいては、モデルやパラメータは企図しているため、この相関の低さはモデルや推定の不正確さの問題ではなく、ショック回復性の欠如という方法論的制約に起因する問題である。

[Buncic et al. \(2023\)](#) の結果は、近年のショック回復性に関する理論研究とも整合的である。観測変数よりも多くの潜在ショックを含む構造では、すべてのショックを一意に回復することは一般的に不可能であることが示されている ([Chahrour and Jurado \(2022\)](#), [Pagan and Robinson \(2022\)](#), [Forni et al. \(2019\)](#))。HLW も同様の構造を有しており、自然利子率や潜在成長率の変化を駆動するショックを観測データから一意に識別することはできない。

この問題に関連して、[Okimoto \(2019\)](#) はショック回復性を明示的に議論してはいな

いものの、潜在変数の低頻度のトレンドを確率的トレンドではなく ST モデルを用いて低頻度の滑らかな構造変化として捉える実証的アプローチを提案している。この枠組みでは、SS によるショックの回復に依存しないため、[Buncic et al. \(2023\)](#) はショックの回復性の問題を回避しうる一つの例として挙げている。

本研究は、[Okimoto \(2019\)](#) のアプローチを HLW 型の自然利子率と潜在成長率の推定に応用し、[Buncic et al. \(2023\)](#) が指摘するショックの回復性の問題に対する具体的な代替手法として、既存研究を拡張する。

3 モデル

本章では、ベンチマーク分析として HLW の SS モデルに基づく自然利子率推定モデルを整理し、本論文が提案する ST モデルとの関係を明確化する。まず、HLW の SS 表現、潜在変数の解釈、推定手順を要約する。次に、本論文のモデルがベンチマークに対してどの面で拡張したかを示す。

3.1 HLW モデル

本研究が依拠する HLW の準構造モデルは、標準的な 3 方程式のニューケインジアン・モデル（IS 曲線、ニューケインジアン・フィリップス曲線、金融政策ルール）の含意を取り入れている。ただし、HLW では金融政策ルールを構造方程式として明示的に推定するのではなく、政策金利を観測変数として扱った上で、IS 曲線およびフィリップス曲線に基づきインフレ率が安定する均衡実質金利として自然利子率を識別する枠組みを採用している。具体的には、潜在 GDP、潜在成長率及び自然利子率といった観測不能な潜在変数を状態変数として扱い、観測可能な系列であるインフ

レ率、実質 GDP 及び政策金利と整合的になるように SS モデルの推定を行っている。

$$\tilde{y}_t = a_{y,1}\tilde{y}_{t-1} + a_{y,2}\tilde{y}_{t-2} + \frac{a_r}{2} \sum_{j=1}^2 (r_{t-j} - r_{t-j}^*) + \varepsilon_{\tilde{y},t}, \quad (1)$$

$$\pi_t = b_\pi \pi_{t-1} + (1 - b_\pi) \pi_{t-2,4} + b_y \tilde{y}_{t-1} + \varepsilon_{\pi,t}, \quad (2)$$

ここで、(1) 式 $\tilde{y}_t$ は対数実質 GDP ギャップであり、対数実質 GDP (y_t) と対数潜在 GDP (y_t^*) の差である GDP ギャップとして $\tilde{y}_t = 100(y_t - y_t^*)$ で定義される。 r_t は実質短期金利、 r_t^* は自然利子率を表している。(2) 式の π は CPI 上昇率、 $\pi_{t-2,4}$ は HLW に倣い過去 2 期から 4 期までの平均インフレ率であり、期待インフレ率の代理変数となっている。

それぞれの式の $\varepsilon_{\tilde{y},t}$ と $\varepsilon_{\pi,t}$ は需給ギャップとインフレ率への i.i.d ショックであり、 $\varepsilon_{\tilde{y},t} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_{\tilde{y}}^2)$ 、 $\varepsilon_{\pi,t} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\pi^2)$ を仮定する。潜在変数 y_t^* と r_t^* の状態方程式は以下の式に従う：

$$y_t^* = y_{t-1}^* + g_{t-1} + \varepsilon_t^{y*}, \quad (3)$$

$$g_t = g_{t-1} + \varepsilon_t^g, \quad (4)$$

$$r_t^* = g_t + z_t, \quad (5)$$

$$z_t = z_{t-1} + \varepsilon_t^z. \quad (6)$$

(4) 式の g は対数潜在成長率のトレンド成分、(5) 式の z は自然利子率のうちトレンドで説明できない成分を示している。観測方程式と同様に、それぞれのショックに対して $\varepsilon_{y^*} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_{y^*}^2)$ 、 $\varepsilon_g \sim \mathcal{N}(0, \sigma_g^2)$ 、 $\varepsilon_{z,t} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_z^2)$ を仮定する。

3.2 推定手順

HLW モデルでは、 y_t^* 、 g_t^* 及び r_t^* にランダムウォーク成分が含まれている。このため、これらの状態変数に対応するショックの分散を他のパラメータと同時に最尤推定すると、分散推定値が 0 近傍に張り付く問題が生じやすく、推定結果が不安定となることが知られている。とりわけ、ローカルトレンド型 SS モデルにおいては、トレンド成分と循環成分の識別が弱く、分散パラメータの推定が困難になるという問題が指摘されている。HLW はこの弱識別問題を回避するため、ショックの分散を直接推定するのではなく、[Stock and Watson \(1998\)](#) が提案した Median Unbiased Estimator の考え方にに基づき、それぞれ

$$\lambda_g \equiv \frac{\sigma_g}{\sigma_{y^*}}, \quad \lambda_z \equiv \frac{\alpha_r \sigma_z}{\sigma_y} \quad (7)$$

と定義し、これらの値を三段階で推定している。第 1 段階では、 y_t から y_t^* および g_t^* を推定し、潜在成長率ショックに関する λ_g を決定する。第 2 段階では、この結果を所与として、IS 曲線およびフィリップス曲線を含む準構造モデルを推定し、自然利子率ショックに関する λ_z を決定する。第 3 段階では、これらの推定結果である λ_g 及び λ_z を固定した上で、モデル全体を用いて r_t^* の系列を抽出する。

本稿では、先行研究との比較性および推定結果の頑健性を確保する観点から、ベンチマークとして HLW によるこの三段階推定の枠組みを踏襲して r_t^* の推定を行う。各段階における具体的な推定手順および設定値については、補論 A を参照。

3.3 ST モデルによる拡張

本稿では、 r_t^* および g_t^* をランダムウォーク型の潜在変数として扱う従来の SS モデルに対し、これらの長期トレンドが時間を通じて滑らかに構造変化する可能性を明示

的に捉えるため、ST モデルによる拡張を行う。具体的には、 $x_t = (r_t^*, g_t^*)$ が共通の推移関数 $G(\cdot)$ に従って 2 つのレジーム間を滑らかに移行すると仮定する。モデルは以下のように定式化される。

$$x_t = x_1 + G(s_t; c, \gamma)(x_2 - x_1) \quad (8)$$

推移関数 $G(\cdot)$ は 0 から 1 の範囲をとる関数であり、 $G = 0$ のとき $x_t = x_1$ 、 $G = 1$ のとき $x_t = x_2$ となる。

本稿の目的は、 r_t^* の推定を行うとともに、 r_t^* の継続したレジームの変化を分析することであるため、Okimoto (2019) に倣い、推移関数 $G(\cdot)$ の形状は、構造変化が連続的かつ単調に進行する状況を適切に表現できるロジスティック型の関数を採用する。ロジスティック型の推移関数は

$$G(s_t; c, \gamma) = \frac{1}{1 + \exp(-\gamma(s_t - c))}, \gamma > 0 \quad (9)$$

と定義され、パラメータ (γ) は推移の速度を、 c は推移の中心を決定する。 s_t は推移が何により引き起こされるかを定義することができ、本稿では、まず低頻度の構造変化の存在自体を識別することを目的とするため、特定の経済変数を推移変数として仮定せず、時間経過そのものを推移変数として採用する。具体的には、Okimoto (2019) に倣い、時点 (t) とサンプルの長さ (T) の比率である $s_t = t/T$ そのものがレジームの変化を起こすと仮定する。つまり、時間の経過によってレジームが変化するようなモデルを仮定し、 r_t^* や g_t^* の長期的なトレンドの変化を捉えることとする。自然利子率は人口動態、生産性、安全資産需要といった構造要因により決定される。これらの要因は一般に離散的なジャンプではなく、制度変化や経済構造変化を伴いながら徐々に進行するため、自然利子率の変化も滑らかなレジーム移行として表現される可能性が大きい。そのため、時間の経過によって、急激な変化だけでなく、滑らか

な状態変化を記述できるこのタイプの ST モデルは非常に魅力的なモデルとなっている。

ST モデルで扱う状態の数は、理論的には 3 状態、4 状態 ... と増やすことが可能であり、

$$x_t = x_1 + \sum_{j=1}^{n-1} G_j(s_t; c_j, \gamma_j)(x_{j+1} - x_j), \quad c_1 < c_2 < \dots < c_{n-1}. \quad (10)$$

と拡張され、例えば 3 状態を仮定するのであれば

$$x_t = x_1 + G_1(s_t; c_1, \gamma_1)(x_2 - x_1) + G_2(s_t; c_2, \gamma_2)(x_3 - x_2), \quad c_1 < c_2 \quad (11)$$

と表現される。

サンプル内におけるレジーム移行の回数は、モデルを設計する段階であらかじめ与える必要がある。 n 状態モデルを仮定する場合、ST モデルに関しては、[Luukkonen et al. \(1988\)](#) により、線形モデルに対する ST 型の非線形性を検定する手法が提案されている。しかし、本稿のモデルでは、ST 型の推移関数を単独の時系列モデルとしてではなく、HLW 型の準構造モデルの内部で r_t^* および g_t^* を規定する要素として導入している。そのため、通常の ST モデルに対する線形性検定をそのまま適用し、仮説検定によりレジーム数を決定することは困難である。

そこで本稿では、状態数を統計的検定によって選択するのではなく、日米のマクロ経済に関する歴史的・制度的な変化を踏まえ、3 状態モデルを採用する。すなわち、サンプル期間を通じて自然利子率および潜在成長率が一度だけ水準を変化させるのではなく、初期の高成長・高金利環境、その後の移行期、そして低成長・低金利環境という複数の局面を経て推移したと考える。より具体的には、日本では、バブル期およびその崩壊、さらに 1990 年代以降の長期停滞とデフレ的環境への移行が、自然利子率および潜在成長率の長期的な低下をもたらしたと考えられる。一方、米国では、

戦後の高成長・高金利環境から、1980 年代以降の金融政策運営の変化やインフレ率の安定化を経て、2000 年代以降の低金利環境へと移行したと推測できる。このため、本稿では $n = 3$ とし、2 つの推移関数によって r_t^* および g_t^* の長期的な変化を表現する。

以上より、本稿で r_t^* を推定するモデルは以下のとおりである：

$$\tilde{y}_t = a_{y,1}\tilde{y}_{t-1} + a_{y,2}\tilde{y}_{t-2} + \frac{a_r}{2} \sum_{j=1}^2 (r_{t-j} - r_{t-j}^*) + \varepsilon_{\tilde{y},t}, \quad (12)$$

$$\pi_t = b_\pi \pi_{t-1} + (1 - b_\pi) \pi_{t-2,4} + b_y \tilde{y}_{t-1} + \varepsilon_{\pi,t}, \quad (13)$$

$$r_t^* = r_1^* + G(s_t, \gamma_1, c_1)(r_2^* - r_1^*) + G(s_t, \gamma_2, c_2)(r_3^* - r_2^*) \quad (14)$$

$$g_t^* = g_1^* + G(st, \gamma_1, c_1)(g_2^* - g_1^*) + G(st, \gamma_2, c_2)(g_3^* - g_2^*) \quad (15)$$

$$y_t^* = y_{t-1}^* * (1 + g_{t-1}^*) \quad (16)$$

ここで、それぞれの変数の表現はベンチマークとなる HLW のモデルと一致している。また、サンプル内の初期の y_0^* はパラメータとして推定した。

式 (11) から (15) の 5 式から、推定すべきパラメータ

$$\theta = (a_1, a_2, a_r, b_\pi, b_y, \gamma_1, c_1, \gamma_2, c_2, r_1^*, r_2^*, r_3^*, g_1^*, g_2^*, g_3^*, \sigma_y, \sigma_\pi, y_0^*) \quad (17)$$

を定義する。本稿のモデルでは、推移関数 $G(\cdot)$ により r_t^* および g_t^* がパラメータ θ の関数として表現される。さらに、 y_t^* はパラメータである初期値 (y_0^*) と $\{g_t^*\}_{t=1}^T$ から構成されるため、 $\{r_t^*, y_t^*\}_{t=1}^T$ は HLW のような SS モデルにおける潜在状態として推移するのではなく、ある θ の下で一意に定まる。この結果、確率的な要素は IS 式およびフィリップス曲線に含まれる誤差項 $\varepsilon_{y,t}(\theta)$ 、 $\varepsilon_{\pi,t}(\theta)$ のみとなる。本稿では、これらの誤差項が i.i.d な正規分布に従うと仮定する。このとき、観測データ $[y_t, \pi_t, r_t]_{t=1}^T$ の下での尤度関数は、各期の誤差項の密度の積として

$$L(\theta) = \prod_{t=t_0}^T \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_y^2}} \exp\left(-\frac{\varepsilon_{y,t}(\theta)^2}{2\sigma_y^2}\right) \right] \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\pi^2}} \exp\left(-\frac{\varepsilon_{\pi,t}(\theta)^2}{2\sigma_\pi^2}\right) \right] \quad (18)$$

と書ける。モデルの推定の際には、対数尤度関数を最大化する。すなわち、

$$\begin{aligned}\ell(\theta) &\equiv \log L(\theta) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{t=t_0}^T \left[\log(2\pi\sigma_y^2) + \frac{\varepsilon_{y,t}(\theta)^2}{\sigma_y^2} \right] - \frac{1}{2} \sum_{t=t_0}^T \left[\log(2\pi\sigma_\pi^2) + \frac{\varepsilon_{\pi,t}(\theta)^2}{\sigma_\pi^2} \right].\end{aligned}$$

最尤推定量 $\hat{\theta}$ は、対数尤度を最大化する解として

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta} \ell(\theta) \quad (19)$$

により定義されるため、HLW における IS 曲線とフィリップス曲線、ST モデルのパラメータは同時に推定が可能となっている。一方で、推移関数の形状を決定する c, γ については、非線形な関数となっているため推定することが難しくなっている。この問題に対処するため、本稿では推移のタイミングを決定する c についてはグリッドサーチにより探索し、それぞれの c の下でほかのパラメータを推定している。

4 データ

本節では分析に使用したデータについて説明する。HLW モデルの観測変数は、1) 実質 GDP、2) インフレ率、3) 実質短期金利の 3 系列である。米国に関しては、セントルイス連邦準備銀行 (FRED) のデータベースより、実質 GDP として Real Gross Domestic Product(季節調整済み)、インフレ率として Consumer Price Index for All Urban Consumers: All Items Less Food and Energy in U.S. City Average(季節調整済み)、短期金利として Federal Funds Effective Rate を用いた。日本に関しては、実質 GDP は総務省の公表する国民経済計算 (GDP 統計) の季節調整済み系列を用い、インフレ率は消費者物価指数 (除く生鮮食品) から算出した¹⁾。短期金利について

1) 季節調整を行う際は X-12-ARIMA を用い、消費増税該当月のインフレ率は前後 1 か月のインフレ率の平均で代替した。

は、日本銀行のオーバーナイトコールレートを用いた。短期金利の実質化の際に使用する期待インフレ率は、Fujiwara et al. (2016a) に倣いインフレ率の AR(3) モデルの予測値を代理変数として用いた²⁾。米国に関しては 1960 年第 1 四半期から 2025 年第 2 四半期、日本に関しては 1985 年第 3 四半期から 2025 年第 2 四半期を分析対象とした。ここで、Holston et al. (2023) が指摘するように、COVID-19 期のような急激な変化がサンプル内に含まれていると、カルマンフィルターを用いた SS モデルの推定において、潜在変数の推定が不安定になる可能性がある。本稿で用いる ST モデルによる推定ではこの問題は発生しないが、比較のために行うベンチマークの分析においては、COVID-19 期に対応する 2020 年第 2 四半期から 2022 年第 4 四半期までのデータを補完した系列を用いて分析を行った³⁾。補完の方法として、全期間のデータを用いた重み付きの Hodrick-Prescott フィルターを利用した。具体的には、四半期データ ($t = 1, \dots, T$) に対し、COVID-19 期の重み (w_t) を 0 とし、それ以外の期間では w_t を 1 とする重み付き HP フィルタにより、トレンド成分 $\{\tau_t\}_{t=1}^T$ を推定する。すなわち、

$$\min_{\{\tau_t\}_{t=1}^T} \sum_{t=1}^T w_t (y_t - \tau_t)^2 + \lambda \sum_{t=3}^T (\Delta^2 \tau_t)^2, \quad (20)$$

ここで $\Delta^2 \tau_t \equiv \tau_t - 2\tau_{t-1} + \tau_{t-2}$ であり、 $\lambda = 1600$ を用いた⁴⁾。これにより、COVID-19 期の変動がトレンド推定に与える影響を除去した系列を構築している。

2) 実質化に用いる期待インフレ率の指標による分析結果の変動については補論 B で示している。

3) Holston et al. (2023) ではモデルを拡張し、該当の期間においてショックの分散が時変になることを許容するモデルで推定を行っている。

4) Hamilton (2018) が指摘するように、HP フィルタにはデータを追加した際に過去に遡り値が変化するなど、データの端点に大きな変動がある際に問題が生じることが分かっている。本稿では COVID-19 期の影響後のサンプルとして 2 年分のサンプルを追加している。

5 結果

本節では米国、日本それぞれのベンチマークである HLW モデルと、代替モデルである ST モデルの結果を述べる。

5.1 HLW の結果

図 1, 図 2 は HLW に基づく米国と日本の r_t^* と g_t^* の推定結果を示している。米国における r_t^* の水準は、1960 年代では 5% を超えるほどであったが、その後は長期的に低下傾向を示し、COVID-19 以降には 0% を下回る水準に達している。これは [Holston et al. \(2023\)](#) を用いて推定された COVID-19 期の影響を調整した推計値と比較して低い水準となっている。この差異は、COVID-19 期に観測された異常値の取り扱いに起因する可能性がある。本稿では当該期間のデータを補完した上で推定を行っているが、この処理により COVID-19 期の急激な変動が一時的ショックや観測誤差として切り分けられる余地が相対的に小さくなり、結果として r_t^* や g_t^* に反映されたと考えられる⁵⁾。日本における r_t^* の水準は、[Fujiwara et al. \(2016b\)](#) が示したように、90 年代初頭の日本の r_t^* は 5% を超える水準であったが、バブル崩壊を経て急激に下落し、リーマンショック後は 0% 近傍で推移している⁶⁾。米国と日本の r_t^* の推定結果を俯瞰すると、[Holston et al. \(2017\)](#)、[Holston et al. \(2023\)](#)、[Del Negro et al. \(2019\)](#) などの複数の先行研究で指摘されているとおり、世界全体で r_t^* の水準が低下していることとも整合的な結果となっている。一方で g_t^* に関しては、米国と日本で異なる特徴が観

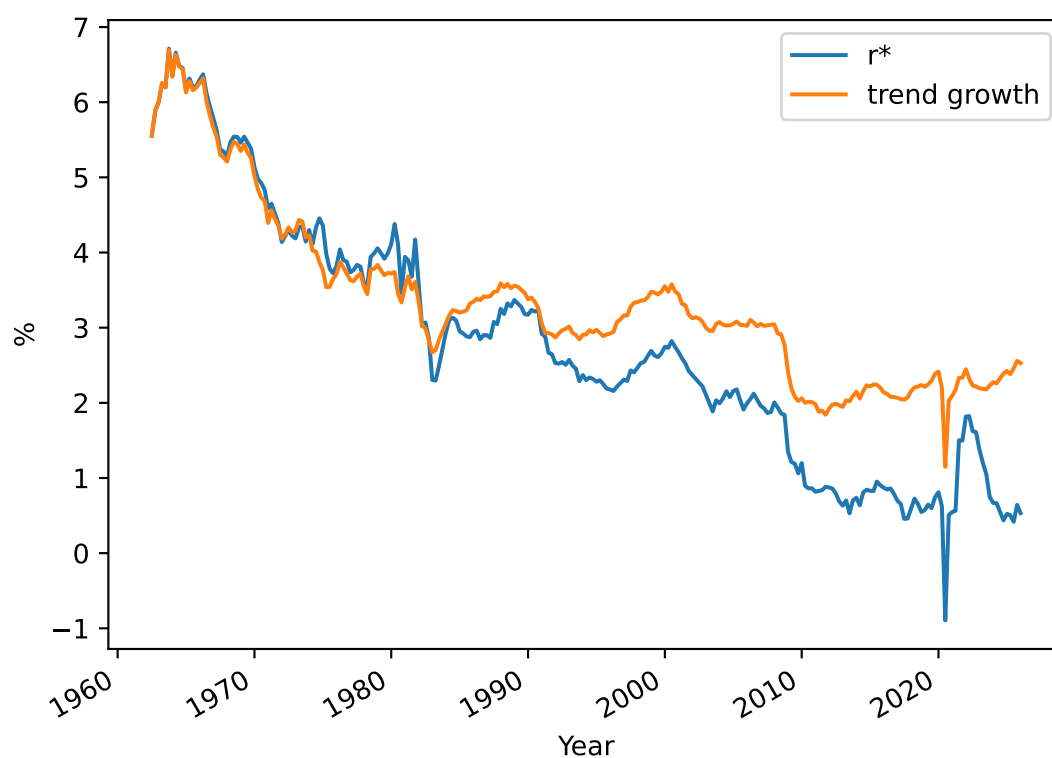
5) 一方で、[Buncic et al. \(2023\)](#) が推定した米国の自然利子率の推定結果はより低い値であり、推定された値の水準は、極端に低い水準ではないといえる。

6) [Fujiwara et al. \(2016b\)](#) のモデルは LW に基づく IS 曲線に、輸入物価と原油価格を含むものである。

察される。米国では r_t^* と g_t^* が明確に区別されているのに対し、日本では両者がほぼ重なって推移している。HLW の枠組みでは、 r_t^* は g_t^* に連動する成分と、それ以外の要因を集約した z_t に分解されるが、米国では z_t が無視できない大きさを持ち、特に、1990 年代後半以降は推定された r_t^* と g_t^* が乖離するようになっている。式 5 より、HLW の状態空間モデルにおいて r_t^* は成長要因である g_t^* とそれ以外の z_t の合計になっている。したがって、成長に起因しない要素によって自然利子率が押し下げられていることが確認できる。一方、日本の推定結果では z_t が非常に小さく、結果として r_t^* の変動の大部分が g_t^* によって説明される形となっている。これは、長期にわたる低金利、低インフレの環境の下でマクロ変数の変動が限定的であったことにより、 r_t^* と g_t^* の識別が困難である可能性を示唆している。表 1 は HLW モデルにより推定された米国と日本のパラメータを比較している。特に、過去の実質金利と r_t^* の乖離（実質金利ギャップ）である $\frac{\alpha_r}{2} \sum_{j=1}^2 (r_{t-j} - r_{t-j}^*)$ 及び、ラグ付きの需給ギャップである $b_y \hat{y}_{t-1}$ のパラメータである α_r と β_y の推定結果に注目する。理論的には、実質金利が r_t^* を上回る（下回る）局面では、金融環境が引締めの（緩和的）となり、需要やインフレ率を抑制（刺激）することから、その乖離に対するパラメータ $\alpha_r < 0$ となることが期待される。また、需給ギャップが正（負）の局面ではインフレ圧力が高まる（低下する）ため、金融政策はこれに対して引締め（緩和）的に反応すると考えられ、 $\beta_y > 0$ が想定される。推定結果は想定通り、米国及び日本ともに $\alpha_r < 0$ かつ $\beta_y > 0$ が得られている。特に米国では $\alpha_r = -0.039$ 、 $\beta_y = 0.329$ と、 r_t^* より高い実質金利の水準が金融を引締め、需給ギャップを押し下げ、フィリップス曲線を通じてインフレを押し上げるというモデルのメカニズムに沿った推定となっている。一方で日本では、 $\alpha_r = -0.002$ 、 $\beta_y = 0.025$ といずれのパラメータもゼロ近傍であり、IS 曲線における金利のチャンネルとフィリップス曲線の傾きが極めて弱い推定となっている。

る⁷⁾。この結果は、低インフレ・低金利の環境が長期化したサンプルの下で、実質金利ギャップの変動幅が小さく α_r 及び β_y の識別が弱くなり、インフレ率の変動がインフレ率そのものと期待要因に強く支配されるという識別上の問題が発生していることが考えられる。

図 1: HLW(2017) による自然利子率の推定 (米国)



7) HLW では α_r 、 β_y の 2 つのパラメータに $\alpha_r < -0.0025$ 、 $\beta_y > 0.025$ の 2 つの制約を置いて推定を行っているため、日本の結果においてはこの制約に抵触した結果となっている。

図 2: HLW(2017) による自然利子率の推定 (日本)

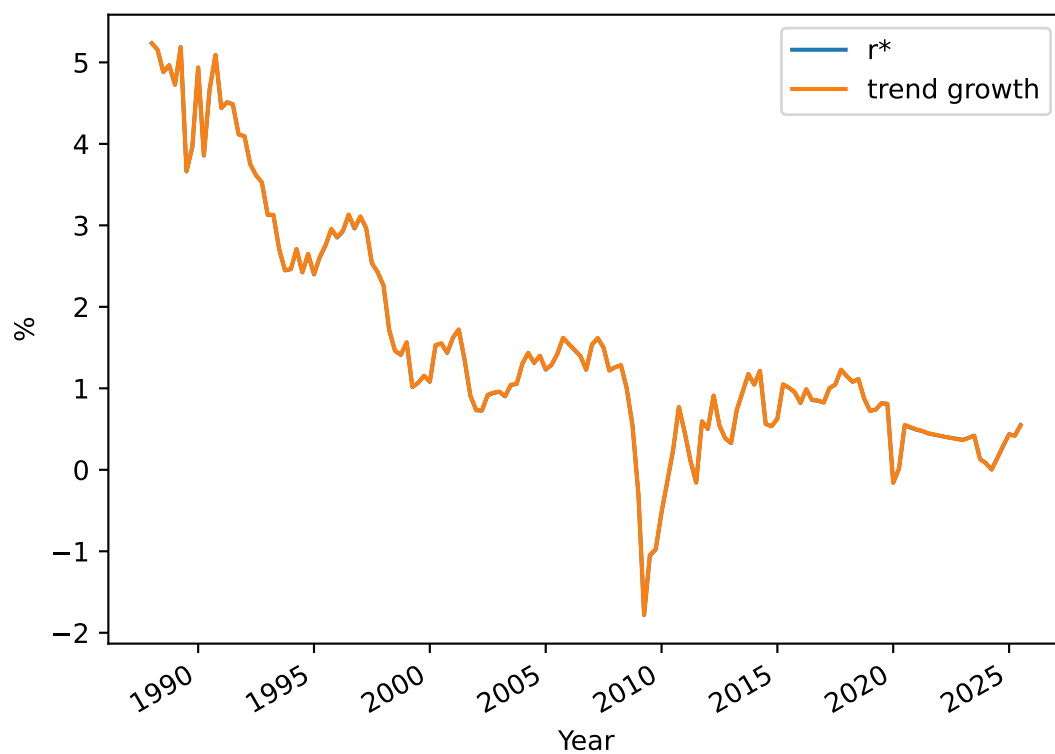


表 1: 日米のパラメータ比較

	米国	日本
Sample	1960-2025	1986-2025
α_1	1.658	1.861
α_2	-0.726	-0.870
α_r	-0.039	-0.002
β_π	0.520	0.364
β_y	0.329	0.025
λ_g	0.044	0.077
λ_z	0.110	0.185
$\sigma_{\tilde{y}}$	0.09	0.00
σ_π	1.244	1.232
σ_{y^*}	0.691	0.925

5.2 ST モデルの結果

表 2 は ST モデルにより推定された米国と日本のパラメータを比較している。括弧内の数値はパラメトリック・ブートストラップにより計算した標準誤差（以下ブートストラップ標準誤差という。）の結果を示している⁸⁾。まず、推移関数のパラメータである c_1 および c_2 を見てみよう。米国の推移関数のパラメータは $c_1^{us} = 0.1$ および $c_2^{us} = 0.65$ であり、1960 年代後半から 1970 年代にかけて一度目の構造変化が生じ、2000 年代後半に二度目の構造変化が生じていることが示唆される。推定された各レジームにおける r_t^* は、 $r_1^{*,us} = 4.490(\%)$ 、 $r_2^{*,us} = 2.104(\%)$ 、 $r_3^{*,us} = -0.194(\%)$ であり、レジームが進むにつれて r_t^* が段階的に低下している。また、一度目と二度目の構造変化の形状を表すパラメータはそれぞれ、 $\gamma_1^{us} = 200$ 及び $\gamma_2^{us} = 75.556$ であり、レジームが比較的急速に推移していることがわかる。次に、日本の推移関数のパラメータ c_1 および c_2 を見てみよう。 $c_1^{jp} = 0.125$ および $c_2^{jp} = 0.525$ と、1990 年初頭に一度目の構造変化が生じ、2000 年代後半に二度目の構造変化が生じていることが示唆される。推定された各レジームにおける r_t^* は $r_1^{*,jp} = 6.59(\%)$ 、 $r_2^{*,jp} = 1.40(\%)$ 、 $r_3^{*,jp} = 0.39(\%)$ であり、米国と同様にレジームが進むにつれて r_t^* が段階的に低下している。また、 $\gamma_1^{jp} = 93.71$ 、 $\gamma_2^{jp} = 200$ と大きく、バブル崩壊前後と金融危機における日本経済の急速な環境変化を捉えている可能性がある。一方で推定された $r_t^{*,jp}$ そのものの変動は小さく、バブル崩壊以降一貫して低水準で推移していたことが読み取れる。最尤推定法で得られた推定パラメータに基づき、推移関数を用いて r_t^* と g_t^* をプロットしたものが図??、図 4 である。HLW の推定結果（図 2）と比較すると、いずれの系列でもサンプル初期に高かった r^* が時間を通じて低下する点は共通している。一方で、ST モデ

8) 推移関数内の c に関してはグリッドサーチにより推定されるため標準偏差を表記していない。

表 2: 日米のパラメータ推定結果 (ST モデル)

	米国	日本
Sample	1960–2025	1986–2025
α_1	1.189 (0.06)	0.923 (0.08)
α_2	-0.257 (0.05)	-0.101 (0.08)
α_r	-0.040 (0.02)	-0.113 (0.08)
β_π	0.578 (0.06)	0.347 (0.079)
β_y	0.154 (0.04)	0.085 (0.060)
γ_1	200.000 (54.53)	93.71 (45.13)
c_1	0.1 (-)	0.125(-)
γ_2	75.556 (56.618)	200 (49.23)
c_2	0.65 (-)	0.525(-)
r_1^*	4.49 (2.703)	6.59 (1.53)
r_2^*	2.104 (1.950)	1.40 (1.78)
r_3^*	-0.194 (1.997)	0.39 (1.67)
g_1^*	0.013 (0.001)	0.015 (0.002)
g_2^*	0.007 (0.000)	0.002 (0.000)
g_3^*	0.005 (0.000)	0.001 (0.000)
σ_y	0.708	0.881
σ_π	1.277	1.221
Log likelihood	706.49	445.487

注：括弧内はブートストラップ標準誤差を表す。 $c_{1,2}$ はグリッドサーチにより候補集合から選択されるため、標準誤差を報告しない。

ルでは、 r_t^* と g_t^* が相対的に異なる水準で推移していることが確認できる。これは、本稿のモデルがトレンド成分に構造変化を明示的に許容しているためである。すなわち、HLW では r_t^* と g_t^* がランダムウォーク型の確率的トレンドとして推移するのに対し、本稿の ST モデルでは推移関数によりトレンドの水準が推定された結果、サンプル後半にかけて r_t^* がより低い水準へ移行し、同時に g_t^* も独自の水準で推移したことが示されている。従って日本の場合のように長期にわたり HLW の観測変数であるインフレ率や政策金利が低い場合、ST モデルによる推定は有効であると考えられる。

日米の推定結果について、ブートストラップ標準誤差を確認すると、HLW 型の IS 曲線およびフィリップス曲線の係数はおおむね安定して推定されている一方で、推移関数の傾きを表す γ_j およびレジーム別の r_t^* については、相対的に大きな標準誤差が得られた。この結果は、 r_t^* の水準推定に伴う不確実性を反映していると考えられる。

特に、 r_t^* は IS 曲線における実質金利ギャップを通じて識別されるため、実質金利ギャップの係数 α_r が小さい場合には、 r_t^* の水準を精密に識別することが難しい。また、 γ についても、推移が十分に急である場合には異なる値の γ が類似した推移関数を生成しうるため、その水準自体は弱く識別されたと考えられる。

一方で、 g_j^* については、ブートストラップ標準誤差が相対的に小さく推定結果は安定している。これは、本稿の ST モデルが、 r_t^* の水準そのものよりも g_t^* の長期的な変化をより安定的に捉えていることを示唆している。 g_t^* は y_t^* の推移を通じて実体経済のトレンドと直接結びついているため、 r_t^* と比較してデータから推定に十分な情報が得られたといえる。加えて、HLW を踏襲したモデルのパラメータである $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_r, \beta_\pi, \beta_y$ に関する標準偏差は日米の推定結果とともに小さくなっているのは特筆すべき点である。このことは、観測方程式に含まれる動学関係については、ST モデルを導入した場合でも過度に不安定化していないことを意味する。すなわち、本稿の推定結果において大きな不確実性が集中しているのは、主として r_t^* の水準そのものや推移関数の形状を規定する一部のパラメータであり、IS 曲線およびフィリップス曲線に対応する基本的なマクロ経済関係そのものではない。これは、本稿の ST モデルが HLW の基礎的な構造を損なうものではなく、むしろ r_t^* および g_t^* の長期的な変化を表現する部分に不確実性を集約していることを示している。特に、 α_r の推定値が比較的安定していることは、実質金利ギャップが需給ギャップに与える影響を通じて r_t^* を識別するという HLW 型モデルの基本的な識別構造が、ST モデルの下でも一定程度維持されていることを示唆する。日本の推定結果において α_r の推定の不確実性が高かった HLW の結果と比較して、推移関数を導入し長期的な構造の仮定を導入したことの利点であるといえる。

以上の結果を踏まえると、不確実性の大きい r_t^* の水準そのものを推移関数の直接

の分析対象とするよりも、比較的安定して推定される g_t^* を基礎として r_t^* を求めるようなモデルに拡張することが有効であると考えられる。すなわち、 r_t^* を独立した時変パラメータとして推定するのではなく、 g_t^* とその他の構造的要因によって規定される変数として定式化することで、 r_t^* の識別に追加的な制約を与えて推定が可能になると期待できる。

図 3: ST モデルによる推定結果 (米国)

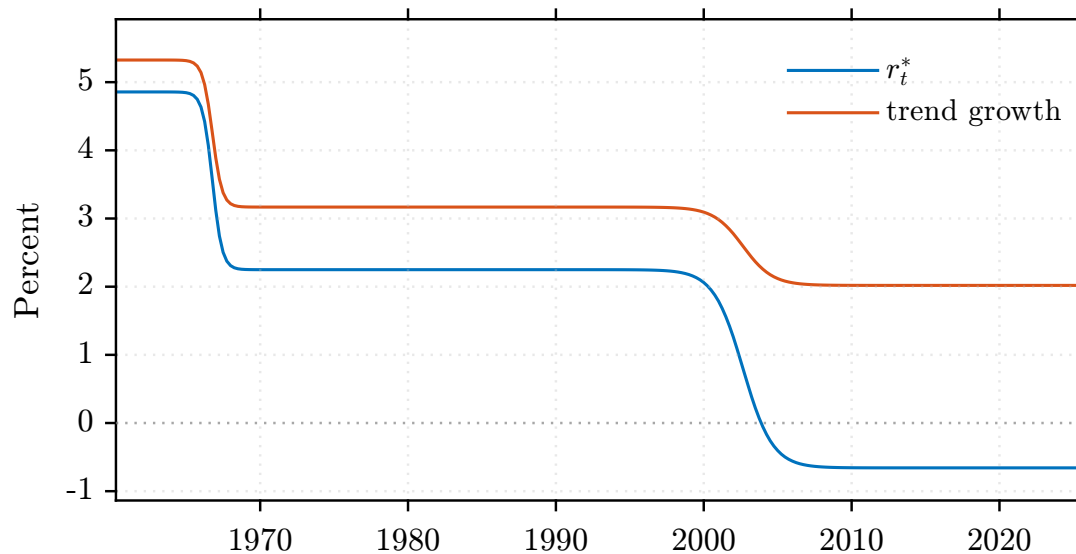
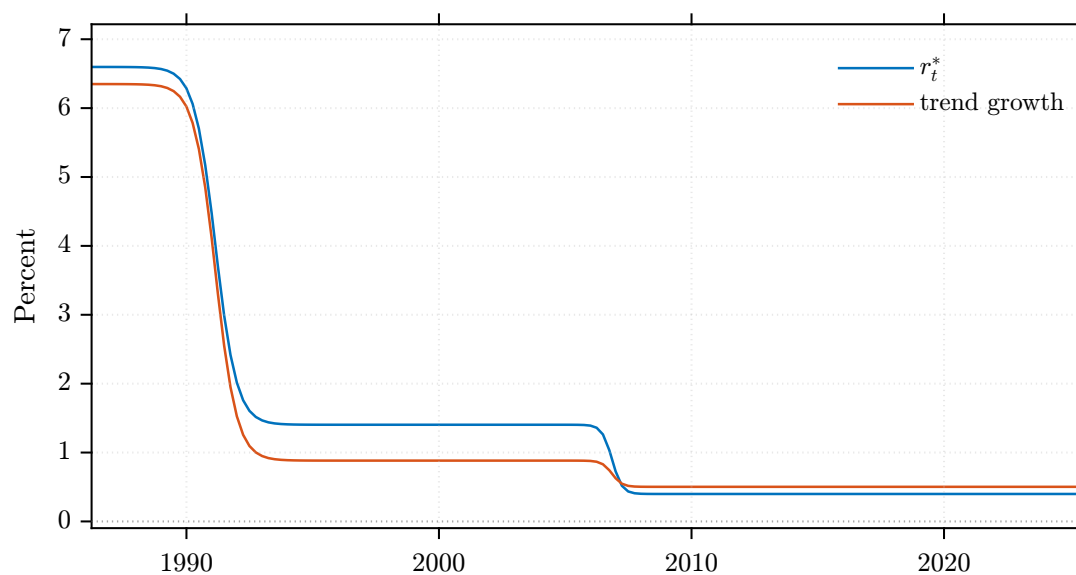


図 4: ST モデルによる推定結果 (日本)



5.3 コンビニエンス・イールドによる拡張モデル

5.2 で得られた推定結果より、 r_t^* と g_t^* が共通の推移関数に従うと仮定して推定した結果、 r_t^* の水準の推定の不安定となる一方で、 g_t^* の推定は比較的安定して推定できることがわかった。本節では HLW 型のモデルに ST モデルを導入して g_t^* を推定したうえで、 r_t^* を求める構造を追加で仮定して分析を行う。

HLW では、 r_t^* を成長率とその他の変動要素に分解して推定を行っている。また、Ferreira and Shousha (2023) は r_t^* の変動要因として安定資産需要、安定資産供給、コンビニエンス・イールド、人口動態、生産性、グローバルスピルオーバーを挙げている。この区分を参考にすると、人口動態や生産性が g_t^* に含まれるのであれば、 z_t に相当するのは安定資産に関する情報である。Szöke et al. (2024) は HLW 型のモデルにコンビニエンス・イールドを組み合わせることで、 r_t^* の推定が安定することを確認している。本稿ではこれらの先行研究に従い、モデルを以下のように拡張する。

$$\tilde{y}_t = a_{y,1}\tilde{y}_{t-1} + a_{y,2}\tilde{y}_{t-2} + \frac{a_r}{2} \sum_{j=1}^2 (r_{t-j} - r_{t-j}^*) + \varepsilon_{\tilde{y},t}, \quad (21)$$

$$\pi_t = b_\pi \pi_{t-1} + (1 - b_\pi) \pi_{t-2,4} + b_y \tilde{y}_{t-1} + \varepsilon_{\pi,t}, \quad (22)$$

$$g_t^* = g_1^* + G(st, \gamma_1, c_1)(g_2^* - g_1^*) + G(st, \gamma_2, c_2)(g_3^* - g_2^*) \quad (23)$$

$$r_t^* = g_t^* + \beta_{CY} CY_t \quad (24)$$

$$y_t^* = y_{t-1}^* * (1 + g_{t-1}^*) \quad (25)$$

ここで、 CY_t はコンビニエンス・イールドであり、本稿では Szöke et al. (2024) に基づき Moody's による Aaa 社債利回りから米国 10 年国債利回りを差し引いたスプレッドを用いている⁹⁾。

9) コンビニエンス・イールドの系列に関しては、HP フィルタを用いてトレンド成分を抽出して分析を行っている。

図5と図6は推定された g_t^* と r_t^{*CY} を表している。また、表3は推定された係数とブートストラップによる標準誤差を示している。 r_t^* を g_t^* と同一の推移関数に従うと仮定して行った推定結果と比較すると、 g_t^* の形状は日米ともに変化がないという結果になっている。また、コンビニエンス・イールドの r_t^* への影響を示すパラメータである β_{CY} の推定値は負となっている。これは、安全資産への需要が高まると、安全資産が通常の金融資産と比較して追加的な価値を提供するようになり、その結果として投資家がより低い利回りを受け入れるようになることを意味している。したがって、コンビニエンス・イールドの上昇は安全資産利回りを押し下げる方向に作用し、 r_t^* の低下要因として働くと解釈できる。理論的な符号と実証結果が一致したことにより、コンビニエンス・イールドをこの z_t の決定要因として導入することで、 r_t^* の長期的な変動を、実体経済要因と金融市場要因に分解して理解することが可能となったと判断できる。

図5: コンビニエンス・イールドを加味した ST モデルによる推定結果 (米国)

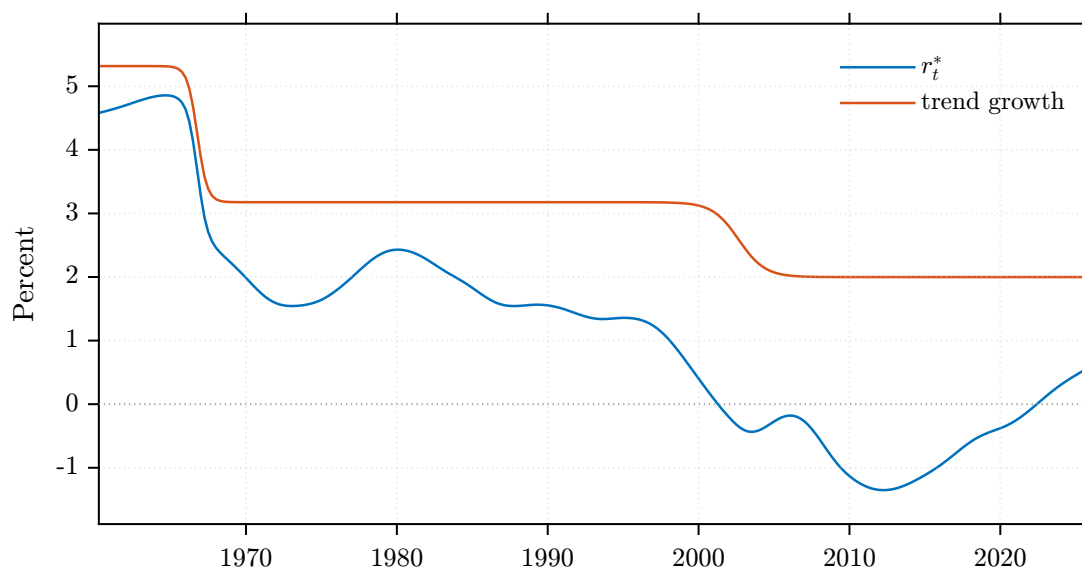


図 6: コンビニエンス・イールドを加味した ST モデルによる推定結果 (米国)

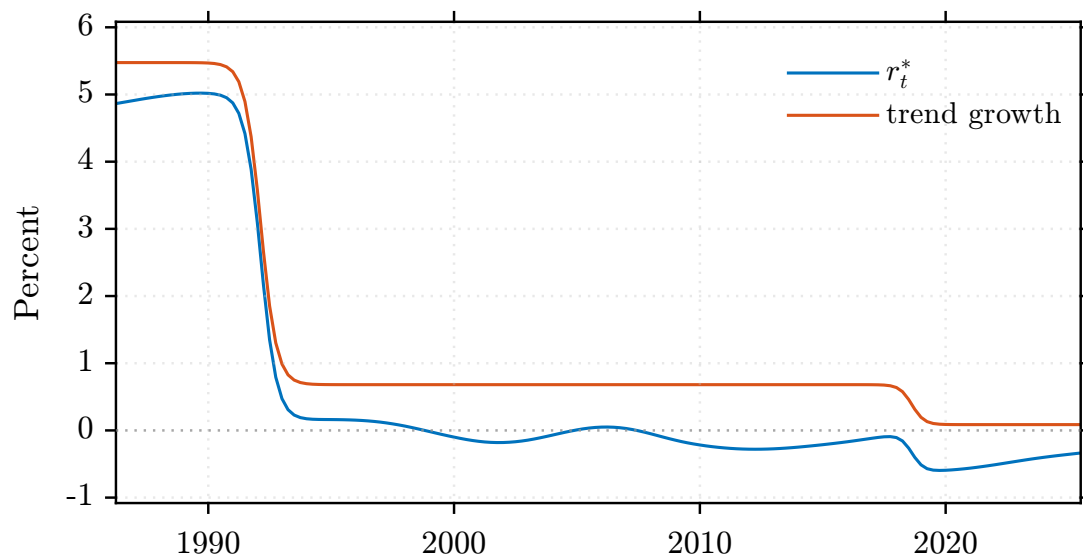


表 3: 日米のパラメータ推定結果 (コンビニエンス・イールドモデル)

	米国	日本
Sample	1960–2025	1986–2025
α_1	1.188 (0.062)	0.926 (0.086)
α_2	-0.257 (0.059)	-0.116 (0.081)
α_r	-0.045 (0.025)	-0.275 (0.127)
β_π	0.578 (0.060)	0.340 (0.080)
β_y	0.154 (0.045)	0.097 (0.060)
γ_1	200 (64.451)	122.05 (56.102)
c_1	0.100 (–)	0.150 (–)
γ_2	75.078 (74.580)	159.500 (74.778)
c_2	0.550 (–)	0.675 (–)
g_1^*	0.0133 (0.0013)	0.0137 (0.0021)
g_2^*	0.0079 (0.0002)	0.0017 (0.0002)
g_3^*	0.0050 (0.0003)	0.0002 (0.0004)
β_{CY}	-1.784 (4.759)	-0.512 (4.663)
σ_y	0.707 (0.032)	0.877 (0.051)
σ_π	1.278 (0.057)	1.207 (0.069)
init_ystar	8.110 (0.032)	12.707 (0.049)
Log likelihood	706.07	445.79

注：括弧内はブートストラップ標準誤差を表す。 c_1, c_2 はグリッドサーチにより候補集合から選択されるため、標準誤差を報告していない。

6 結論

本稿は HLW 型準構造モデルを基礎に、自然利子率や潜在成長率の構造変化を明示的に捉えるための平滑推移 (Smooth Transition: ST) モデルの導入や、コンビニエンス・イールドを変数として組み入れた枠組みへと拡張した。

この拡張により、トレンド成分に確率的なランダムウォークを仮定することなく、トレンド成分の変化を有限個の滑らかなレジーム推移として表現することが可能となる。また、構造変化をトレンド成分の移行として明示的に捉えることで、観測変数の変動の一部を一時的ショックではなくトレンド変化として解釈することが可能となる。

推定の結果、1). 自然利子率は日米ともに分析対象期間を通じて長期的に低下しており、既存研究の結果と整合的であることが確認された。2). レジーム変化のタイミングと移行速度は国ごとに異なる形で示された。とりわけ日本では、バブル崩壊前後に対応する局面において推移の速度が大きく、短期間で急激な構造変化が生じた可能性が高い。また、3). コンビニエンス・イールドをモデルに入れることで、2020 年以降の日本の自然利子率の緩やかな上昇を観察することができた。

ただし、このモデルは、トレンドの時間変化を明示的なパラメータのもとで捉えることを可能にする一方、推移速度の推定値は関数の形状や状態数の選択に影響を受ける可能性があり、解釈にあたっては一定の慎重さが求められる。

今後の課題として、このモデルでは、構造変化をトレンド成分の移行として明示的に捉えることで、観測変数の変動の一部を一時的ショックではなくトレンド変化として解釈することが可能となるが、本稿ではショック分散の体系的な比較までは行っていない。

いない。

本稿では日米ともに 3 状態の ST モデルを採用したが、状態数の選択については情報量規準や予測性能に基づく厳密な比較を行う余地が残されている。特に米国については 2000 年代以降にも自然利子率の顕著な低下が観察されることから、追加的な状態を含む拡張モデルの検討も有益であろう。さらに、コンビニエンス・イールドの影響は時間を通じて一定の前提を置いているため、潜在成長率や自然利子率と同様に、時間とともに係数が推移するモデルに拡張する要素もあげられる。最後に、日本経済は長期にわたる低金利・低インフレ環境から変化しつつある可能性がある。こうした環境下では、構造変化を明示的に考慮した自然利子率推定の重要性は高まると考えられる。より長期のデータが蓄積された段階で、本稿の枠組みに基づく再推定および予測性能の検証を行う必要があるだろう。

Appendix

A HLW モデルの推定

3.1 で紹介した通り、HLW の提案するモデルは 2 本の観測方程式と 3 本の状態方程式から構成される SS モデルである。

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_t &= A'\mathbf{x}_t + H'\xi_t + \nu_t, \\ \xi_t &= F\xi_{t-1} + \eta_t. \end{aligned} \tag{26}$$

ここで、 $\mathbf{y}_t$ は当期の内生変数ベクトル、 $\mathbf{x}_t$ は外生変数およびそのラグからなるベクトルである。 ξ_t は観測されない状態変数ベクトルを表す。確率的ショックである ν_t および ε_t は平均ゼロの正規分布に従い、互いに無相関であると仮定する。すなわち、 ν_t と η_t の共分散行列はそれぞれ R および Q で与えられ、共分散行列 R は常に対角行列であると仮定する。この構造を維持したまま、内生変数と外生変数を変更することで θ_{step1} から θ_{step3} を推定する。

STEP 1: g_t を定数 g としたうえで、実質利子率と自然利子率の乖離をモデルから

取り除いてパラメーター $\theta_{step1} \equiv [\alpha_1, \alpha_2, \beta_\pi, \beta_y, g, \varepsilon_y, \varepsilon_\pi, \varepsilon_{y^*}]$ を推定し、

Median Unbiased Estimator である $\lambda_g \equiv \frac{\sigma_g}{\sigma_{y^*}}$ を得る。

STEP 2: STEP1 で得られた結果を所与とし、 z_t を定数 α_g と置いて、パラメーター

$\theta_{step2} \equiv [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_r, \beta_\pi, \beta_y, \alpha_g, \alpha_0, \varepsilon_y, \varepsilon_\pi, \varepsilon_{y^*}]$ を推定する。推定された結果

より Median Unbiased Estimator である $\lambda_z \equiv \frac{\alpha_r \sigma_z}{\sigma_y}$ を得る。

STEP 3: STEP2 の結果を用い、3.1 で記述したモデル全体を推定し、パラメータ

$\theta_{step3} \equiv [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_r, \beta_\pi, \beta_y, \varepsilon_y, \varepsilon_\pi, \varepsilon_{y^*}]$ を推定する。

B シャドウレートを利用した推定結果

シャドウレートとは、名目短期金利がゼロ金利制約により下方に制約されている場合に、その制約が存在しなければ実現していたと解釈される潜在的な短期金利である。

特に日本のケースでは、1990年代後半以降、ゼロ金利政策、量的・質的金融緩和、マイナス金利政策、イールドカーブ・コントロールなど、非伝統的金融政策が長期にわたり実施されてきた。このような環境では、観測される短期金利がゼロ近傍または低位に固定され、 r^* の変化を十分に反映しない可能性がある。そのため、頑健性チェックとして、政策金利をシャドウレートで代用した推定を追加的に行う。

シャドウレートは、Krippner (2013) による国際的な推定結果を利用した。なお、サンプル開始である 1995 年以前は本文で使用した政策金利の値を用いている。¹⁰⁾

頑健性チェックとして、観測短期金利の代わりにシャドウレートを用いた推定を行った。表 4 は、本文で扱った g^* と r^* が同一の推移関数に従うという仮定によるモデルの推定結果を表している。推定結果から、推移関数の位置 c および推移速度 γ に関する結論は、短期金利系列の変更に対して頑健であることが確認される。特に、日米の 2 度の構造変化のタイミングとして同じ候補である $c = (0.125, 0.525)$ と $c = (0.1, 0.65)$ が選択されたことは構造変化のタイミングに関して頑健性を保証できる結果となった。

HLW 型モデル内のパラメータである $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_r, \beta_\pi, \beta_y)$ についても、推定値は安定

10) <https://www.ljkmfa.com/visitors/>

している。これらの結果は、IS 曲線およびフィリップス曲線を構成する基礎的な動学が、シャドウレートの使用によって大きく変化しないことを示している。

ベンチマーク推定とシャドウレート推定を比較すると、自然利子率のレジーム水準には一部差が見られる。米国では、ベンチマーク推定において

$$(r_1^*, r_2^*, r_3^*) = (4.49, 2.10, -0.19)$$

であるのに対し、シャドウレートを用いた推定では

$$(r_1^*, r_2^*, r_3^*) = (6.37, 1.89, -0.40)$$

となった。特に最終レジームの r_3^* は、 -0.19 から -0.40 へと低下しており、シャドウレートを用いることで低金利期の自然利子率がより低く推定される。

日本では、ベンチマーク推定において

$$(r_1^*, r_2^*, r_3^*) = (6.59, 1.40, 0.39)$$

であるのに対し、シャドウレートを用いた推定では

$$(r_1^*, r_2^*, r_3^*) = (5.70, 0.68, -1.00)$$

となった。日本ではすべてのレジームで自然利子率の水準が低下しており、とりわけ最終レジームの r_3^* は 0.39 から -1.00 へと低下している。この結果は、日本においてゼロ金利制約が長期にわたって実施されたため、シャドウレートを用いて負の領域の値を許容薄することで r^* の終盤レジームがより低く推定されることと整合的である。

以上の結果は、本稿で検出されるレジーム変化のタイミングおよび推移速度が、観測短期金利のゼロ金利制約によって影響を受けないことを示している。同時に、低金利期における自然利子率の水準については、シャドウレートを用いることでより低く推定されるという、理論的にも整合的な差異が確認された。

表 4: 日米のパラメータ推定結果（シャドウレート）

	米国	日本
Sample	1960–2025	1986–2025
α_1	1.191 (0.06)	0.911 (0.09)
α_2	-0.264 (0.05)	-0.08 (0.08)
α_r	-0.018 (0.01)	-0.122 (0.07)
β_π	0.579 (0.06)	0.346 (0.08)
β_y	0.155 (0.04)	0.084 (0.05)
γ_1	200.000 (51.2)	91.45 (42.93)
c_1	0.1 (-)	0.125(-)
γ_2	77.28 (56.89)	200 (44.93)
c_2	0.65 (-)	0.525(-)
r_1^*	6.375 (2.92)	5.70 (1.53)
r_2^*	1.897 (2.37)	0.68 (1.78)
r_3^*	-0.480 (2.22)	-1 (1.67)
g_1^*	0.013 (0.001)	0.015 (0.002)
g_2^*	0.007 (0.000)	0.002 (0.000)
g_3^*	0.005 (0.000)	0.001 (0.000)
σ_y	0.711	0.867
σ_π	1.278	1.221
Log likelihood	707.28	443.61

注：括弧内はブートストラップ標準誤差を表す。 $c_{1,2}$ はグリッドサーチにより候補集合から選択されるため、標準誤差を報告しない。

参考文献

- Robert Barsky, Alejandro Justiniano, and Leonardo Melosi. The natural rate of interest and its usefulness for monetary policy. *American Economic Review*, 104(5):37–43, 5 2014. URL <https://doi.org/10.1257/aer.104.5.37>.
- Michael D. Bauer and Glenn D. Rudebusch. Interest rates under falling stars. *American Economic Review*, 110(5):1316–1354, 5 2020. URL <https://doi.org/10.1257/aer.20191144>.
- Ansgar Belke and Jens Klose. Equilibrium real interest rates and the financial cycle: Empirical evidence for euro area member countries. *Economic Modelling*, 84:357–366, 2020.
- Daniel Buncic. Econometric issues in the estimation of the natural rate of interest. *Economic Modelling*, 132:106641, 2024. doi: 10.1016/j.econmod.2023.106641.
- Daniel Buncic, Adrian Pagan, and Tim Robinson. Recovering stars in macroeconomics. Cama working papers, Centre for Applied Macroeconomic Analysis, Crawford School of Public Policy, The Australian National University, 2023.
- Carlos Carvalho, Andrea Ferrero, Felipe Mazin, and Fernanda Nechio. Demographics and Real Interest Rates Across Countries and Over Time. *Journal of International Economics*, 157:104127, 2025.
- Ryan Chahrour and Kyle Jurado. Recoverability and expectations-driven fluctuations. *Review of Economic Studies*, 89(1):214–239, 2022. doi: 10.1093/restud/rdab010.

- Marco Del Negro, Domenico Giannone, Marc P. Giannoni, and Andrea Tambalotti. Safety, liquidity, and the natural rate of interest. *Brookings Papers on Economic Activity*, 2017(1):235–316, 3 2017. URL <https://www.brookings.edu/articles/safety-liquidity-and-the-natural-rate-of-interest/>.
- Marco Del Negro, Domenico Giannone, Marc P. Giannoni, and Andrea Tambalotti. Global trends in interest rates. *Journal of International Economics*, 118:248–262, 2019.
- Thiago R.T. Ferreira and Samer Shousha. Determinants of Global Neutral Interest Rates. *Journal of International Economics*, 145(C), 2023. doi: 10.1016/j.jinteco.2023.10. URL <https://ideas.repec.org/a/eee/inecon/v145y2023ics0022199623001198.html>.
- Mario Forni, Luca Gambetti, and Luca Sala. Structural VARs and noninvertible macroeconomic models. *Journal of Applied Econometrics*, 34(2):221–246, 2019. doi: 10.1002/jae.2665.
- Shigeaki Fujiwara, Yuto Iwasaki, Ichiro Muto, Kenji Nishizaki, and Nao Sudo. Supplementary paper series for the ‘comprehensive assessment’ (2): Developments in the natural rate of interest in japan. Bank of japan review, 2016a.
- Shigeaki Fujiwara, Yuto Iwasaki, Ichiro Muto, Kenji Nishizaki, and Nao Sudo. Supplementary paper series for the “comprehensive assessment”(2): Developments in the natural rate of interest in japan. Bank of Japan Review Series 2016-E-12, Bank of Japan, 2016b.
- Etienne Gagnon, Benjamin K. Johansson, and David Lopez-Salido. Understanding the new normal: The role of demographics. *IMF Economic Review*, 69(2):357–390, 6 2021. URL <https://doi.org/10.1057/s41308-021-00133-1>.

- G. Goy and Y. Iwasaki. Japan’s natural rate of interest. DNB Working Paper 812, De Nederlandsche Bank, 4 2024. URL <https://www.dnb.nl/en/publications/research/working-papers/working-paper-812/>.
- James D Hamilton. Why you should never use the hodrick-prescott filter. *Review of Economics and Statistics*, 100(5):831–843, 2018.
- Yudai Hatayama, Yuto Iwasaki, Kyoko Nakagami, and Tatsuyoshi Okimoto. Globalization and its growing impact on the natural rates of interest in developed economies. Technical report, Bank of Japan, 2024.
- Kathryn Holston, Thomas Laubach, and John C. Williams. Measuring the natural rate of interest: International trends and determinants. *Journal of International Economics*, 108:S59–S75, 2017.
- Kathryn Holston, Thomas Laubach, and John C. Williams. Measuring the Natural Rate of Interest after COVID-19. Staff Reports 1063, Federal Reserve Bank of New York, June 2023. URL <https://ideas.repec.org/p/fip/fednsr/96351.html>.
- Kei Imakubo, Haruki Kojima, and Jouchi Nakajima. The natural yield curve: Its concept and measurement. *Empirical Economics*, 55:551–572, 2018.
- Benjamin K. Johansson and Elmar Mertens. A time-series model of interest rates with the effective lower bound. *Journal of Money, Credit and Banking*, 53(5):1005–1046, 2021. doi: 10.1111/jmcb.12771.
- Michael T. Kiley. The global equilibrium real interest rate: Concepts, estimates, and challenges. *Annual Review of Financial Economics*, 12(1):305–326, 2020.
- Leo Krippner. Measuring the stance of monetary policy in zero lower bound environments.

Economics Letters, 118(1):135–138, 2013.

Thomas Laubach and John C. Williams. Measuring the natural rate of interest. *The Review of Economics and Statistics*, 85(4):1063–1070, 2003.

Ritva Luukkonen, Pentti Saikkonen, and Timo Teräsvirta. Testing linearity against smooth transition autoregressive models. *Biometrika*, 75(3):491–499, 1988.

James Morley and Benjamin Wong. Measuring the global natural rate of interest. CAMA Working Paper 2/2025, Centre for Applied Macroeconomic Analysis (CAMA), 1 2025. URL <https://cama.crawford.anu.edu.au/publication/cama-working-paper-series>.

James Morley, Trung Duc Tran, and Benjamin Wong. A simple correction for misspecification in trend-cycle decompositions with an application to estimating r^* . *Journal of Business & Economic Statistics*, 42(2):665–680, 4 2024. URL <https://doi.org/10.1080/07350015.2023.2221974>.

James C. Morley. A state-space approach to calculating the beveridge-nelson decomposition. *Economics Letters*, 75(1):123–127, 2002. doi: 10.1016/S0165-1765(01)00591-3.

Jouchi Nakajima, Nao Sudo, Yoshihiko Hogen, and Yuki Takizuka. On the estimation of the natural yield curve. Discussion Paper Series A 753, Institute of Economic Research, Hitotsubashi University, 10 2023. URL <https://hermes-ir.lib.hit-u.ac.jp/hermes/ir/re/82672/DP753.pdf>.

Maurice Obstfeld. Natural and Neutral Real Interest Rates: Past and Future. NBER Working Papers 31949, National Bureau of Economic Research, Inc, December 2023. URL <https://ideas.repec.org/p/nbr/nberwo/31949.html>.

- Yosuke Okazaki and Nao Sudo. Natural rate of interest in japan. Technical report, Bank of japan working paper series, 2018.
- Tatsuyoshi Okimoto. Trend inflation and monetary policy regimes in japan. *Journal of International Money and Finance*, 92:137–152, 2019. ISSN 0261-5606. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jimonfin.2018.12.008>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S026156061830264X>.
- Adrian Pagan and Tim Robinson. Excess shocks can limit the economic interpretation. *European Economic Review*, 145:104120, 2022. doi: 10.1016/j.eurocorev.2022.104120.
- James H Stock and Mark W Watson. Median unbiased estimation of coefficient variance in a time-varying parameter model. *Journal of the American Statistical Association*, 93(441):349–358, 1998.
- Bálint Szőke, Francisco Vazquez-Grande, and Inês Xavier. The drivers of r^* : Accounting for treasuries’ convenience yield. *Available at SSRN 4828053*, 2024.
- Mark A. Wynne and Ren Zhang. Measuring the world natural rate of interest. *Economic Inquiry*, 56(1):530–544, 2018.