

慶應義塾大学総合政策学部4年
72205456 立花怜央

Regime Switching and Dynamic Correlation between Stocks and Bonds:

Evidence from the US Futures Market

2026年1月21日

■ 本研究全体を通してのSummary

研究目的

Bond Risky局面を統計的に特定し、投資戦略に活かす

検証 1

マルコフスイッチングモデルを用いることで2022年以降、株式と債券の正の相関が大きくなるようなBond Risky 状態を特定することができた

検証 2

2022年以降に着目すると、継続して同様の影響を与える指標もあれば、影響に変化がみられた指標も存在した。各指標が状態の変化に与える影響に関する解釈には議論の余地が残った。

検証 3

2つのマルコフスイッチングモデルの投資戦略としてのパフォーマンスは Benchmark と大きく変わらない結果となった。このことから、株債レジームは高頻度で切り替えて収益を狙う対象ではなく、市場環境を把握するためのものと考えられる。



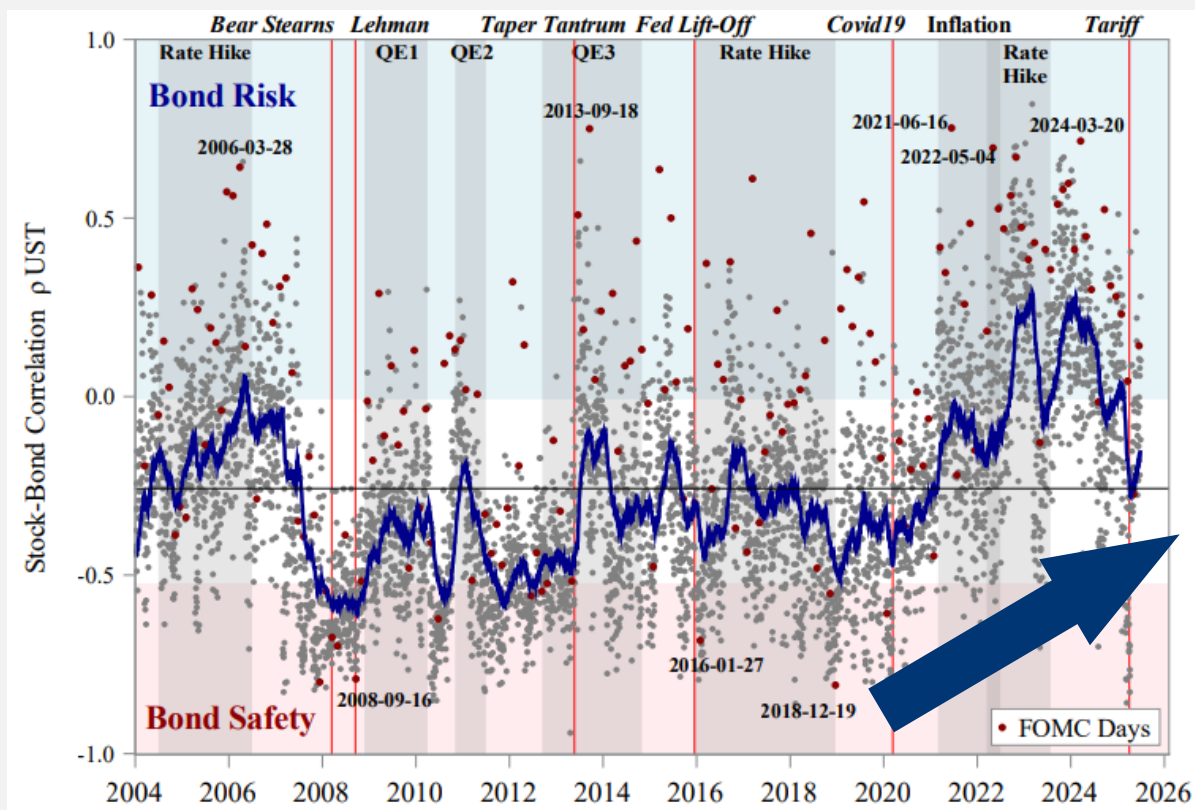
1. 研究背景
2. 検証 1
3. 検証 2
4. 検証 3
5. 考察・展望



1. 研究背景

■ 元来、債券は株式に対する安全資産としての役割を果たしてきた。しかし、近年その役割が失われつつある

米国株先物と米国債先物の高頻度データを用いた相関の推移



2022年以降、相関係数が
明らかに増加している

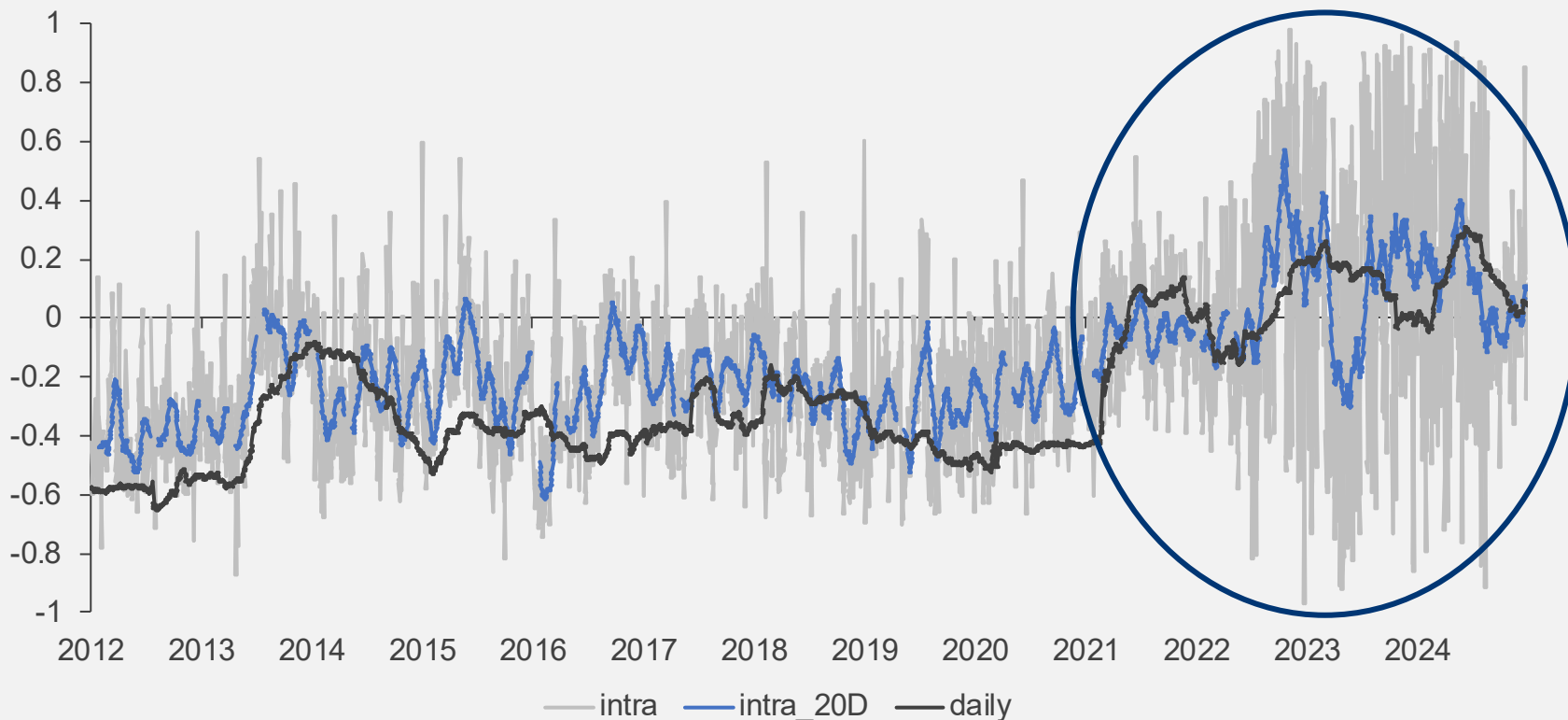


分散効果の低下

出典：Hu, et al.(2025) “The Stock-Bond Correlation: A Tale of Two Days in the U.S. Treasury Market”

■ 先行研究同様、**順相関の傾向**、さらには**ボラティリティの拡大**も確認

米国株先物と米国債先物の高頻度データを用いた相関の推移



Intra：1分足データを用いて、米国株先物と米国債先物それぞれの5分おきリターンを作成。その後、それらの相関を日次で作成した。
Intra_20D：Intraの20日平均 / Daily：日次リターンを用いて、相関を月次で作成し、1週間ごとにローリングした。

- Hu, et al.(2025)では、フルサンプルで事後的に分類しているに過ぎないため、統計的予測によって分類し、投資戦略に活かしていきたい

Hu, et al.(2025)のBond RiskyとBond Safetyの定義

Bond Risky

フルサンプルで
相関係数が正に大きい 20%

Bond Safety

フルサンプルで
相関係数が負に大きい 20%

本研究で明らかにしたいこと

検証1. 状態(Bond Risky or Bond Safety)を統計的に**特定**する

検証2. 状態変化に影響を与える**指標の有無とその関係性**を調べる

検証3. 構築したモデルを用いた**投資戦略を提案**する



2. 検証 1



2-1. Methodology

■ 検証 1 Methodology

検証1. 状態(Bond Risky or Bond Safety)を統計的に特定する

Model

Model1 : 2State Markov-Switching Model

Model2 : 2State Time Varying Transition Probability Markov-Switching Model

Data

以下の1分足データを用いて5分おきリターンを作成。その後、それらの相関を日次で作成した

米国株先物：E-mini S&P 500 futures (ES1)

米国債先物：10-Year T-Note futures (TY1)

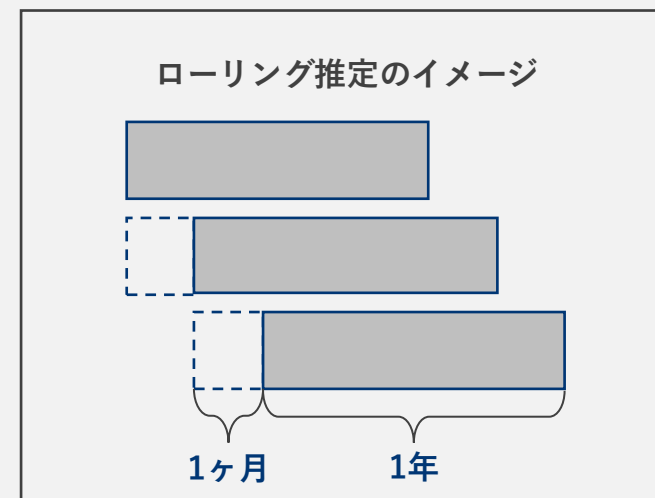
Period

2013年1月4日 ~ 2025年6月30日 (営業日ベース)

Empirical Design

実運用と予測への拡張性からローリング推定を採用
最新の推測値を時系列で図示する

固定窓幅：1年間 / ステップ：1ヶ月



■ 検証1. 状態(Bond Risky or Bond Safety)を統計的に特定する

Model1 : 2State Markov-Switching Model

Base Modelは以下の式で与えられる。

$$\rho_t = \mu_{s_t} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_{s_t}^2), \quad s_t \in \{0, 1\}$$

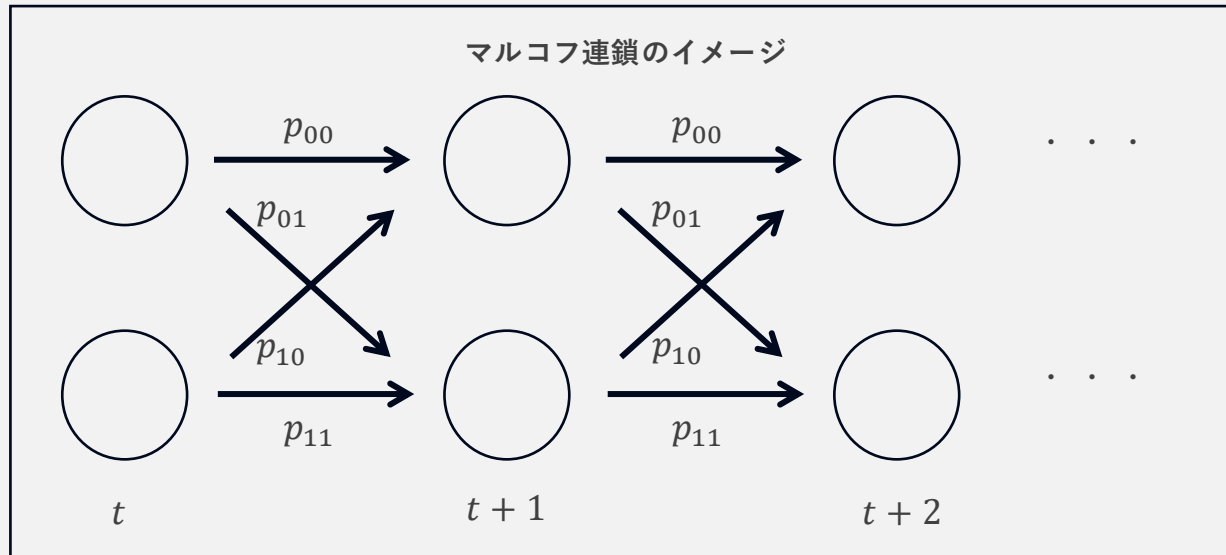
なお、誤差項は、状態 s_t が与えられた条件のもとで独立かつ正規分布に従うと仮定する。ここで、 s_t (t 期におけるState)は以下のようなマルコフ連鎖に従い、遷移確率で表される。

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{pmatrix}, \quad p_{ij} = P(s_t = j \mid s_{t-1} = i), \quad \sum_{j=0}^1 p_{ij} = 1 \text{ for all } i$$

Model1では、平均・分散・遷移確率を最尤法によって推定する。

■ 検証1. 状態(Bond Risky or Bond Safety)を統計的に特定する

Model1 : 2State Markov-Switching Model



※ マルコフスイッチングモデルでは状態過程そのものを観測することはできない点に注意する。

Model1では推定区間の左図の矢印の確率（遷移確率）は**一定**である。他方、Model2では外生変数を加えることで、矢印の確率（遷移確率）が推定区間内で時事刻々と**変化**する。

■ 検証1. 状態(Bond Risky or Bond Safety)を統計的に特定する

Model2 : 2State Time Varying Transition Probability Markov-Switching Model

Base Modelの遷移確率に外生変数・事前決定変数を加えて、遷移確率を時間によって変化させる。

$$p_{ij,t} = \frac{\exp(\alpha_{ij} + \beta'_{ij} Z_{t-1})}{\sum_{k=0}^1 \exp(\alpha_{ik} + \beta'_{ik} Z_{t-1})}$$

ここでZは外生変数・事前決定変数であり、今回は**1期前の相関自身**、**1期前の株式・債券のボラティリティ**、**タームスプレッド**を用いる。

観測方程式ではなく遷移確率に 変数を加える理由

1. 今回加える変数は状態 (Bond Safety or Bond Risky) の変化に影響を与えると考えられるため
2. レジームの平均と加えた変数の効果が競合してしまい、レジームの意味が不明瞭になってしまう

変数の選定理由

- 1期前の相関自身**：市場の慣性を測定する
- 1期前の株式・債券のボラティリティ**：市場心理（特に恐怖感）を代理（VIX指数やMOVE指数よりも直接的に市場心理を反映していると想定）
- タームスプレッド**：市場の景気・金融政策期待を代理

■ 株式と債券のボラティリティ間のVIFがやや気になるものの、大きな問題になりそうなものはない

Data Summary

基本統計量

	count	mean	std	min	25%	50%	75%	max
corr	3371	-0.160	0.301	-0.973	-0.372	-0.193	-0.015	0.981
vol_ES1	3388	0.0006	0.0006	0.0000	0.0003	0.0004	0.0007	0.0101
vol_TY1	3387	0.0002	0.0001	0.0000	0.0001	0.0002	0.0002	0.0018
spread	3182	0.358	0.214	0.005	0.173	0.296	0.524	0.942

相関行列

	corr[t-1]	vol_ES1	vol_TY1	spread
corr[t-1]	1	0.0680	0.2714	0.0982
vol_ES1		1	0.4543	-0.1190
vol_TY1			1	0.1743
spread				1

VIF値

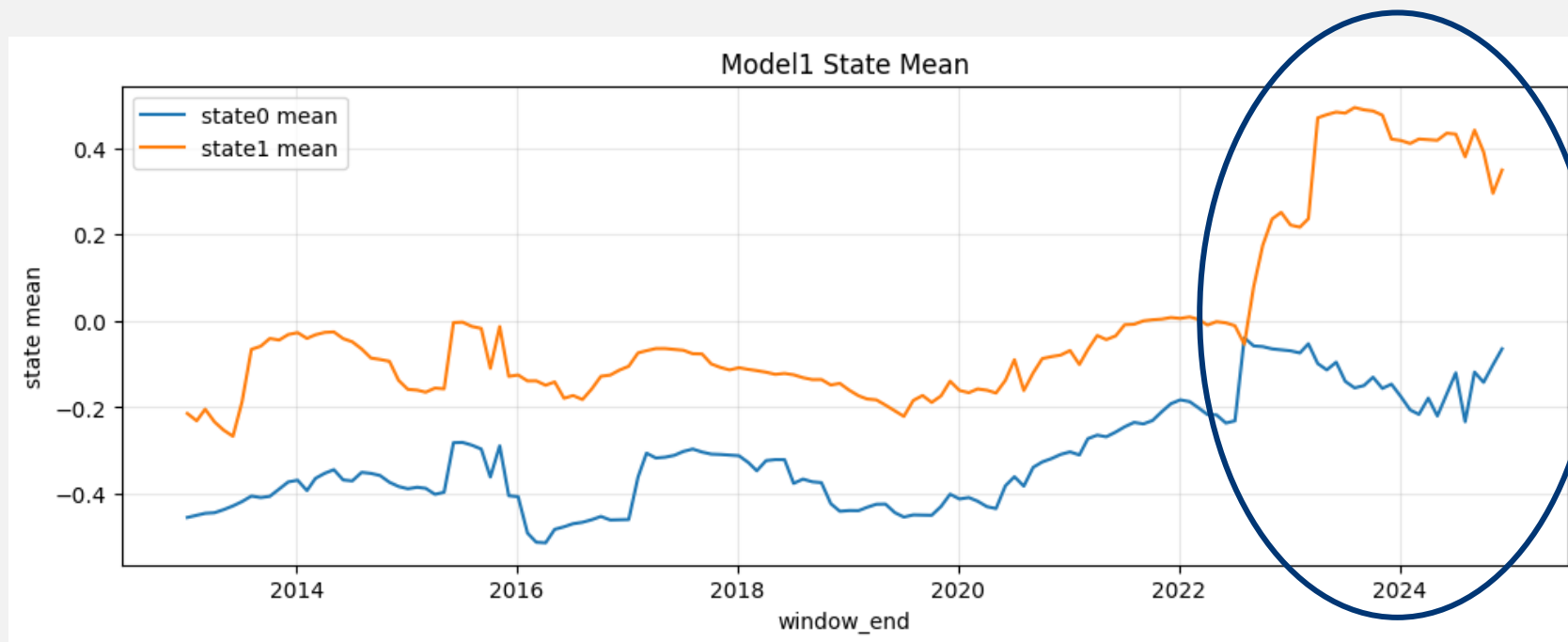
	VIF
corr[t-1]	1.19
vol_ES1	2.55
vol_TY1	4.07
spread	2.60



2-2. Result

2022年以降のstate1がBond Riskyと言えるような動きをしている

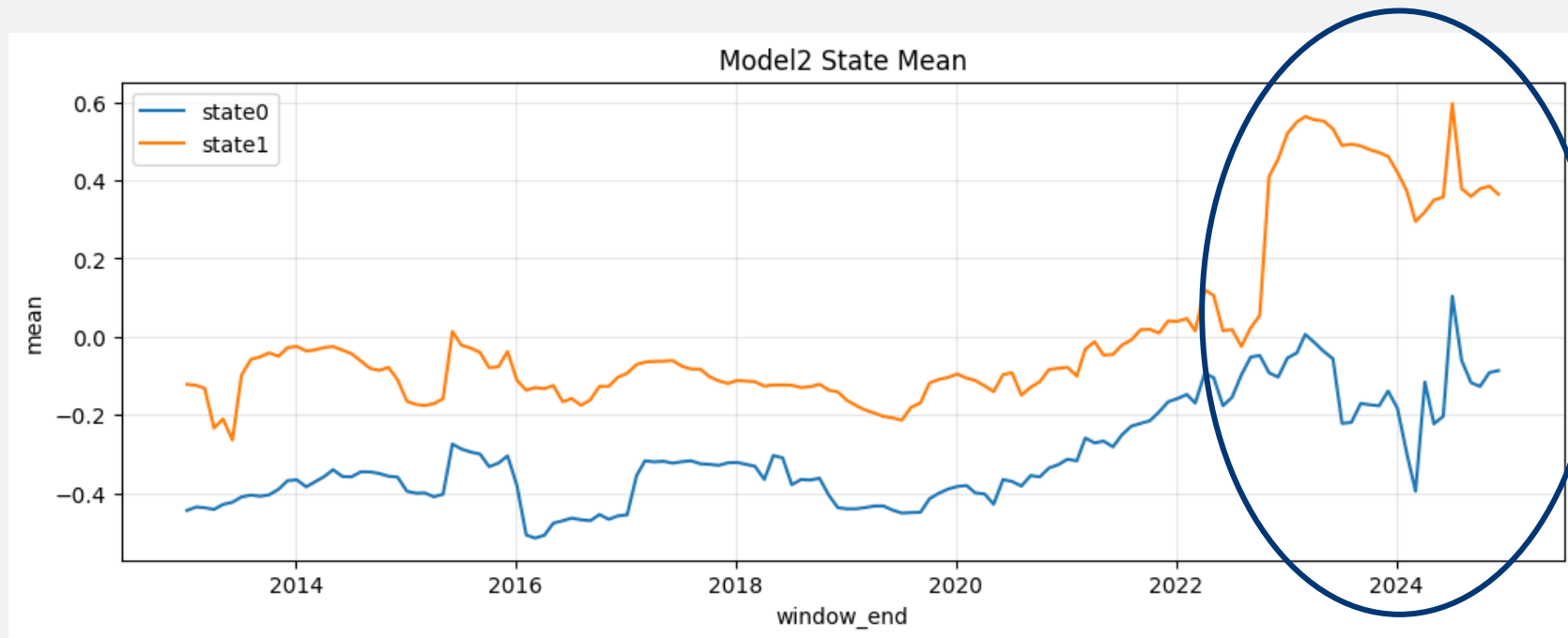
検証1：Model 1 を用いて推定された各状態の平均の時系列推移



全期間を通じて、state 1 がstate 0 よりも平均値が大きく推定されており、概ねstate 1 = Bond Riskyと言えるのではないだろうか。しかし、2022年以前まではstate 1 だとしても平均が0を下回っており、当時までは安全資産としての役割を果たしていたと考えると先行研究や見立てとも整合的。（ボラティリティの議論も必要）

■ こちらも Model 1 同様の特定傾向がみられる

検証 1 : Model 2 を用いて推定された各状態の平均の時系列推移



Model 2 も Model 1 同様、全期間を通じて state 1 が state 0 よりも平均値が大きく推定されており、かつ2022年以前まではstate 1 の平均が0を下回っていた。Model 1 と Model 2 の違いは、2022年以降のstate 1 (Bond Risky) の平均がModel 2 の方が大きく推定されているタイミングがある点にある。



3. 検証 2



3-1. Methodology

■ 検証 2 Methodology

検証2. 状態変化に影響を与える指標の有無とその関係性を調べる

Model

Model2 : 2State Time Varying Transition Probability Markov-Switching Model

Data

検証 1 のデータに加え、以下の日次データを用いる

Term Spread : 10Y Treasury Constant Maturity - 2Y Treasury Constant Maturity

Period

2013年1月4日 ~ 2025年6月30日 (営業日ベース)

Empirical Design

検証 1 同様、**ローリング推定**を採用

遷移確率 (Bond Risky to Bond Safety, Bond Safety to Bond Risky) への各変数の t 値を時系列で図示し、状態変化に影響を与える指標の有無を調べつつ、モデルと市場構造の関係性が時間によってどう変化するのかも調べる

■ Safetyが通常時だと考えると、ベースラインはSafetyを維持しようと動く一方で、加えた変数の増加=不安・景気後退の高まりであり、Riskyに向くと予想

各変数が増加したときの遷移確率に与える影響の仮説

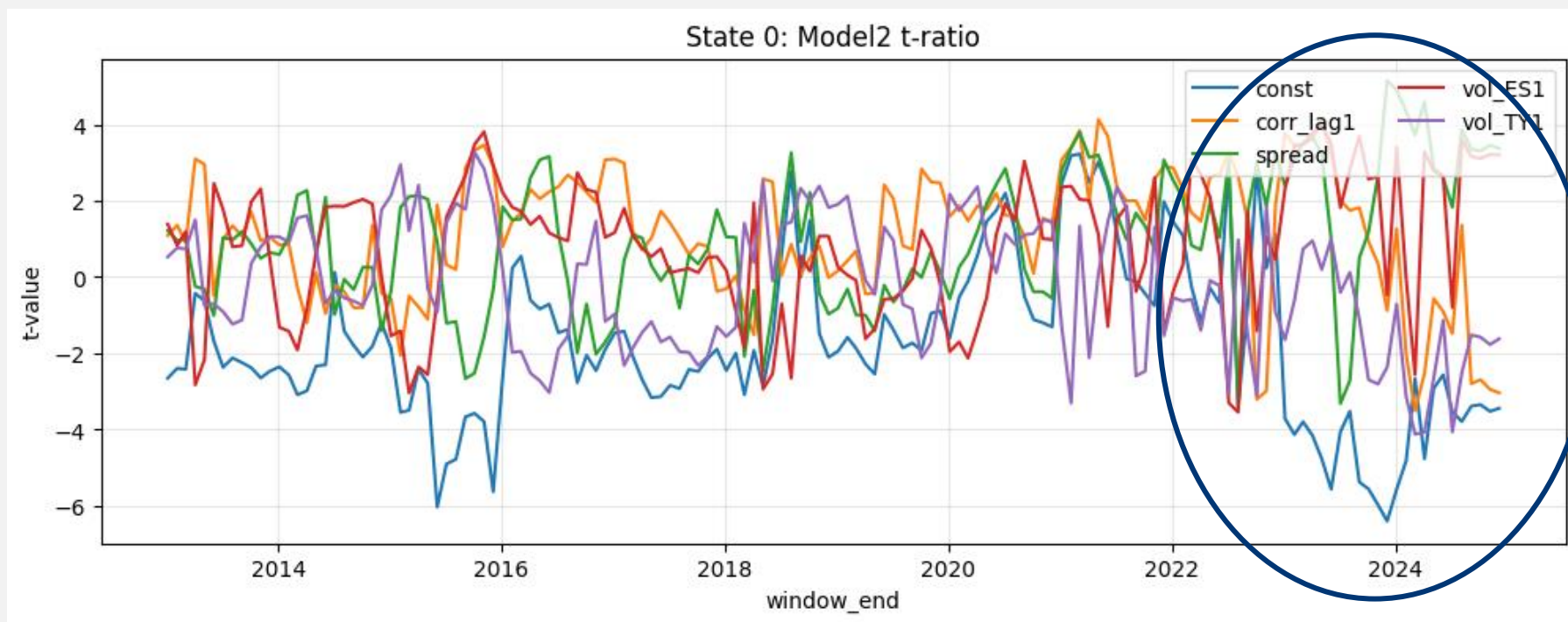
Safety to Risky	変数	Risky to Safety
+	1期前の相関自身	-
	1期前の株式のボラティリティ	
	1期前の債券のボラティリティ	
	タームスプレッド	



3-2. Result

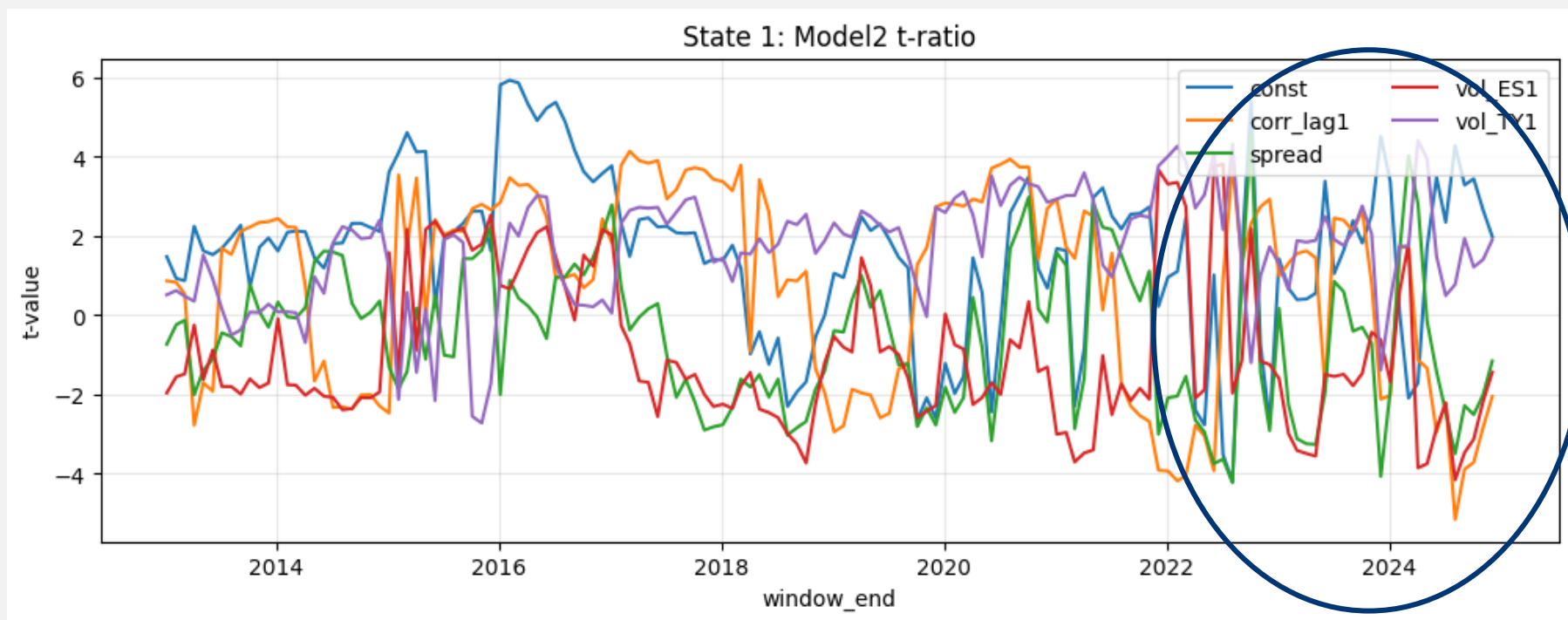
2022年以降に着目すると各変数の t 値が大きくなっており、いくつかの変数には時系列変化がみられる

検証 2 . Model2における外生変数の時系列変化(Bond Safety to Bond Risky)



■ Safety to Risky 同様、2022年以降に着目すると各変数の t 値が大きくなっており、いくつかの変数には時系列変化がみられる

検証 2 . Model2における外生変数の時系列変化(Bond Risky to Bond Safety)



(再掲)

- Safetyが通常時だと考えると、ベースラインはSafetyを維持しようと動く一方で、加えた変数の増加=不安・景気後退の高まりであり、Riskyに向くと予想

各変数が増加したときの遷移確率に与える影響の仮説

Safety to Risky	変数	Risky to Safety
+	1期前の相関自身	-
	1期前の株式のボラティリティ	
	1期前の債券のボラティリティ	
	タームスプレッド	

■ 株式市場の影響が予想通りだったが、債券市場の影響が予想と真逆のものとなり、Bond Riskyは株式市場を起点とする可能性がある

2022年以降における各変数が増加したときの遷移確率に与える影響の結果

Safety to Risky	変数	Risky to Safety
プラス から マイナス	1 期前の相関自身	不安定
概ね プラス (+)	1 期前の株式のボラティリティ	概ね マイナス (-)
概ね マイナス (-)	1 期前の債券のボラティリティ	概ね プラス (+)
概ね プラス (+)	タームスプレッド	不安定

■ 2022年以降の Bond Risky 化は、株債関連の構造変化ではなく、インフレと金融引締めに起因する割引率ショックおよび不確実性の急上昇によって生じた可能性がある。

2022年以降における各変数が増加したときの遷移確率に与える影響の結果

変数	Safety to Risky	Implication
1期前の相関自身	プラス から マイナス	相関の自己参照性は Risky 化を抑制
1期前の株式のボラティリティ	概ね プラス (+)	株式市場の不確実性は Risky 化を促進
1期前の債券のボラティリティ	概ね マイナス (-)	債券ボラ上昇は Safety 機能を部分的に回復
タームスプレッド	概ね プラス (+)	マクロ金融環境の歪みは Risky 化を促進

■ Bond Risky から Bond Safety への回帰は、マクロ環境や相関水準ではなく、不確実性の解消によって生じるのではないだろうか。

2022年以降における各変数が増加したときの遷移確率に与える影響の結果

変数	Risky to Safety	Implication
1 期前の相関自身	不安定	相関水準そのものは回復のシグナルにならない
1 期前の株式のボラティリティ	概ね マイナス (-)	株式不確実性は Safety 回帰を阻害
1 期前の債券のボラティリティ	概ね プラス (+)	Safety 機能の回復を促進 (悪いボラでない可能性)
タームスプレッド	不安定	マクロ環境の改善は Safety 回復を保証しない



4. 検証 3



4-1. Methodology

■ 検証3 Methodology

検証3. 構築したモデルを用いた投資戦略を提案する

Model

Model1 : 2State Markov-Switching Model

Model2 : 2State Time Varying Transition Probability Markov-Switching Model

Benchmark : 過去1年間の相関の平均をとり、ローリングしたヒストリカル平均モデル

Data

検証1・検証2と同様のデータを使用

Period

2013年1月4日 ~ 2025年6月30日 (営業日ベース)

■ 検証3. 構築したモデルを用いた投資戦略を提案する

Empirical Design

株式および債券の2資産からなるポートフォリオを対象として、平均分散アプローチに基づく投資シミュレーションを行う。ただし、日次頻度における期待リターンの予測は極めて困難であることから、両資産の条件付き期待リターンを0と仮定する。

この仮定の下では、平均分散ポートフォリオは最小分散ポートフォリオ（Minimum Variance Portfolio, MVP）に帰着する。

Notation

この仮定の下時点 t から $t+1$ にかけての実現日次リターンを以下のように定義する。

$$r_{t+1} = (r_{ES1,t+1}, r_{TY1,t+1})^\top$$

また、時点 t において決定されるポートフォリオのウェイトを

$$w_t = (w_{ES1,t}, w_{TY1,t})^\top$$

とし、以下の制約を課す。

$$w_t^\top \mathbf{1} = 1$$

■ 検証3. 構築したモデルを用いた投資戦略を提案する

Input

前述の通り、株式・債券ともに日次の条件付き期待リターンをゼロと仮定する。

$$\mu_t = \mathbb{E}_t[r_{t+1}] = (0, 0)^\top$$

よって、ポートフォリオ選択は分散共分散行列のみに基づくものとなる。

ボラティリティは固定窓を直近5営業日、ステップを1日とするローリング推定により算出する。

$$\hat{\sigma}_{i,t} = \sqrt{\frac{1}{W_\sigma - 1} \sum_{j=0}^{W_\sigma - 1} (r_{i,t-j} - \bar{r}_{i,t})^2}, \quad W_\sigma = 5$$

ここで、分散共分散行列をインプットとして与えるため、以下の対角行列を用意する。

$$D_t = \text{diag}(\hat{\sigma}_{ES1,t}, \hat{\sigma}_{TY1,t})$$

■ 検証3. 構築したモデルを用いた投資戦略を提案する

Input

Model 1 および Model 2 については、過去1年間を固定窓、1か月をステップとしてローリング推定を行う。各推定時点においてレジーム別相関推定値を得た後、その後1か月間についてフィルタ確率を計算し、確率が最も高いレジームに対応する相関推定値を採用する。

つまり、 $W = 1$ 年として、

$$\hat{k}_t = \arg \max_{k \in \{0,1\}} \mathbb{P}(s_t = k \mid \mathcal{F}_t), \quad \hat{\rho}_{t+1|t} = \hat{\rho}_{\hat{k}_t}$$

また、Benchmarkでは、過去1年間の相関の単純平均を用いる。

$$\hat{\rho}_{t+1|t} = \frac{1}{W} \sum_{j=0}^{W-1} \widehat{\text{Corr}}(r_{S,t-j}, r_{B,t-j})$$

よって、時点 t における条件付き共分散行列は、

$$\hat{\Sigma}_{t+1|t} = D_t \begin{pmatrix} 1 & \hat{\rho}_{t+1|t} \\ \hat{\rho}_{t+1|t} & 1 \end{pmatrix} D_t$$

■ 検証3. 構築したモデルを用いた投資戦略を提案する

Minimum Variance Portfolio

期待リターンをゼロとするため、ポートフォリオ選択問題は次の最小化問題となる。

$$w_t = \arg \min_w w^\top \hat{\Sigma}_{t+1|t} w \quad \text{s.t.} \quad w^\top \mathbf{1} = 1$$

これを解いて得られたウェイトを用いて、 $t+1$ 期におけるポートフォリオ実現リターンを $R_{p,t+1}$ とすると、

$$R_{p,t+1} = w_t^\top r_{t+1}$$

Portfolio Evaluation

初期値を1とするポートフォリオ価値を

$$V_t = \prod_{u=1}^t (1 + R_{p,u})$$

とし、累積リターンを $V_t - 1$ とする。

■ 検証3. 構築したモデルを用いた投資戦略を提案する

Portfolio Evaluation

また、Benchmarkリターンを $R_{benchmark,t}$ とすると、Model 1・Model 2 をBenchmarkと比較したときのアクティブリターンは、以下のように表せる。

$$A_{p,t} = R_{p,t} - R_{benchmark,t}, \quad p \in \{\text{model1}, \text{model2}\}$$

また、固定窓 W_{SR} を用いたローリング・シャープレシオを以下のように定義する。

※ 以下の $R_{p,t}$ には、 $R_{benchmark,t}$ も含む。

$$IR_{p,t} = \sqrt{252} \frac{\text{Mean}(A_{p,t-W_{IR}+1:t})}{\text{Std}(A_{p,t-W_{IR}+1:t})}$$

同様に、固定窓 W_{IR} とアクティブリターンを用いて、ローリング・インフォメーションレシオを以下のように定義する。

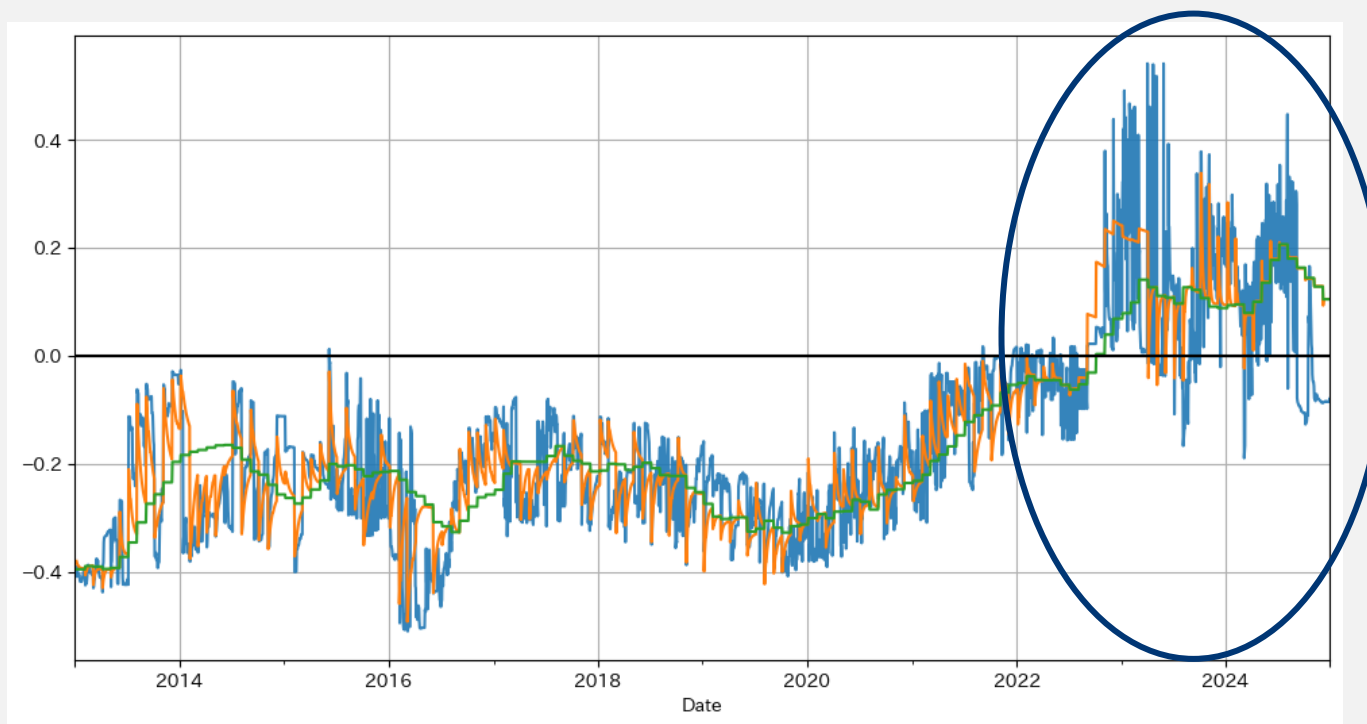
$$SR_{p,t} = \sqrt{252} \frac{\text{Mean}(R_{p,t-W_{SR}+1:t})}{\text{Std}(R_{p,t-W_{SR}+1:t})}$$



4-2. Result

■ 2022年以降のModel2の振れ幅が大きく、予測誤差を大きくするのではないかという懸念がある。

各モデルで予測した相関の時系列推移



Orange : Model1, BLUE : Model2, GREEN : BASE

Model 1、Model 2 はBenchmarkとほとんど変わらない結果になった。 株債分散戦略は、モデル切替よりもエクスポージャー管理が重要である。

各モデルを用いた投資戦略の結果

累積リターンの時系列推移



ローリングシャープレシオの時系列推移



遷移確率を時間変化させることで株債レジームの経済的解釈は改善されるが、**投資戦略としてのパフォーマンスは Benchmark と大きく変わらない結果**となった。株債レジームは高頻度で切り替えて収益を狙う対象ではなく、**市場環境を把握するためのもの**であることを示唆する。

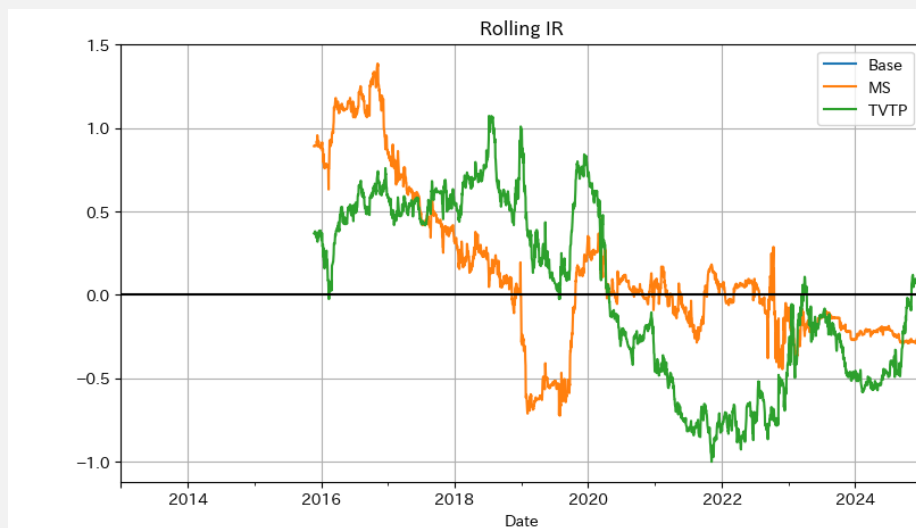
アクティブリターンは見られるものの、その大きさはわずかであり、IRは2022年以降のBond Riskyが出現した局面ではマイナスである。

Base Modelとの比較(超過リターンとインフォメーションレシオ)

アクティブリターンの時系列推移



ローリングインフォメーションレシオの時系列推移



一部期間では超過リターンが観測されるものの、**高ボラティリティ局面では不安定となり、リスク調整後の優位性 (Information Ratio) はほとんど改善していない。**やはり、レジームモデルは**アルファを安定的に創出する**というよりも、**高不確実性下におけるリスク構造の変化を説明する役割を担うもの**と考えるべきか。



5. 考察・展望

■ 本研究全体を通してのSummary

研究目的

Bond Risky局面を統計的に特定し、投資戦略に活かす

検証 1

マルコフスイッチングモデルを用いることで2022年以降、株式と債券の正の相関が大きくなるようなBond Risky 状態を特定することができた

検証 2

2022年以降に着目すると、継続して同様の影響を与える指標もあれば、影響に変化がみられた指標も存在した。各指標が状態の変化に与える影響に関する解釈には議論の余地が残った。

検証 3

2つのマルコフスイッチングモデルの投資戦略としてのパフォーマンスは Benchmark と大きく変わらない結果となった。このことから、株債レジームは高頻度で切り替えて収益を狙う対象ではなく、市場環境を把握するためのものと考えられる。

■ モデルの改良を行い、Bond Riskyの特定を向上させる

1. 観測方程式に外生変数を加えたモデルで再検証してみる

Xを外生変数とすると、

$$X_t = \begin{pmatrix} \text{VIX}_t \\ \text{MOVE}_t \\ \text{Spread}_t \\ \text{Trend}_t \end{pmatrix}$$

$$\rho_t = \mu_{s_t} + \beta'_{s_t} X_t + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_{s_t}^2),$$

VIXやMOVEの代わりにModel2同様一期前の相関自体やボラティリティを入れる。

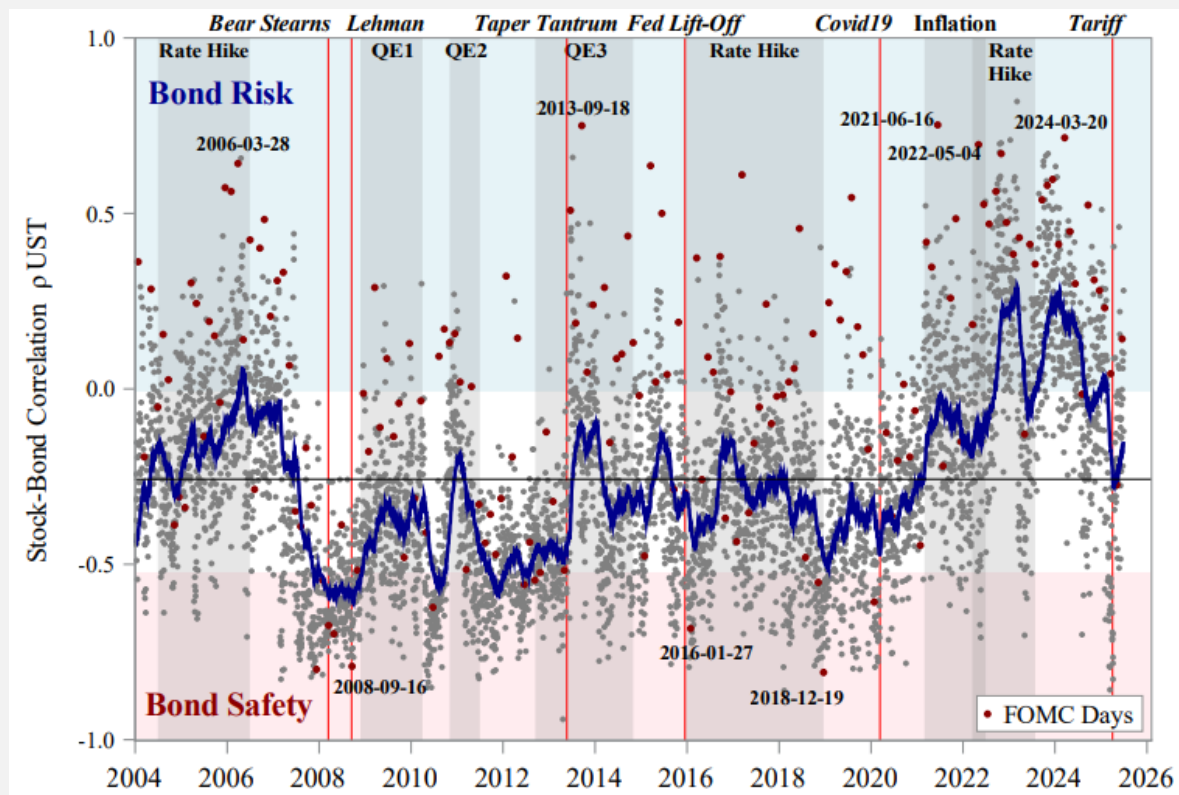
2. 株式と債券のリターン系列を同時推定して、相関を二次的に算出する

$$\mathbf{r}_t = \boldsymbol{\mu}_{s_t} + \boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_t \mid s_t = j \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}_j), \quad j = 0, 1.$$

Rや μ をアセットのベクトルとして、同時に推定する

■ 先行研究ではFOMC発表日で相関がSafetyやRiskyに振れやすいことを確認

3. イベントサプライズを外生変数として加える

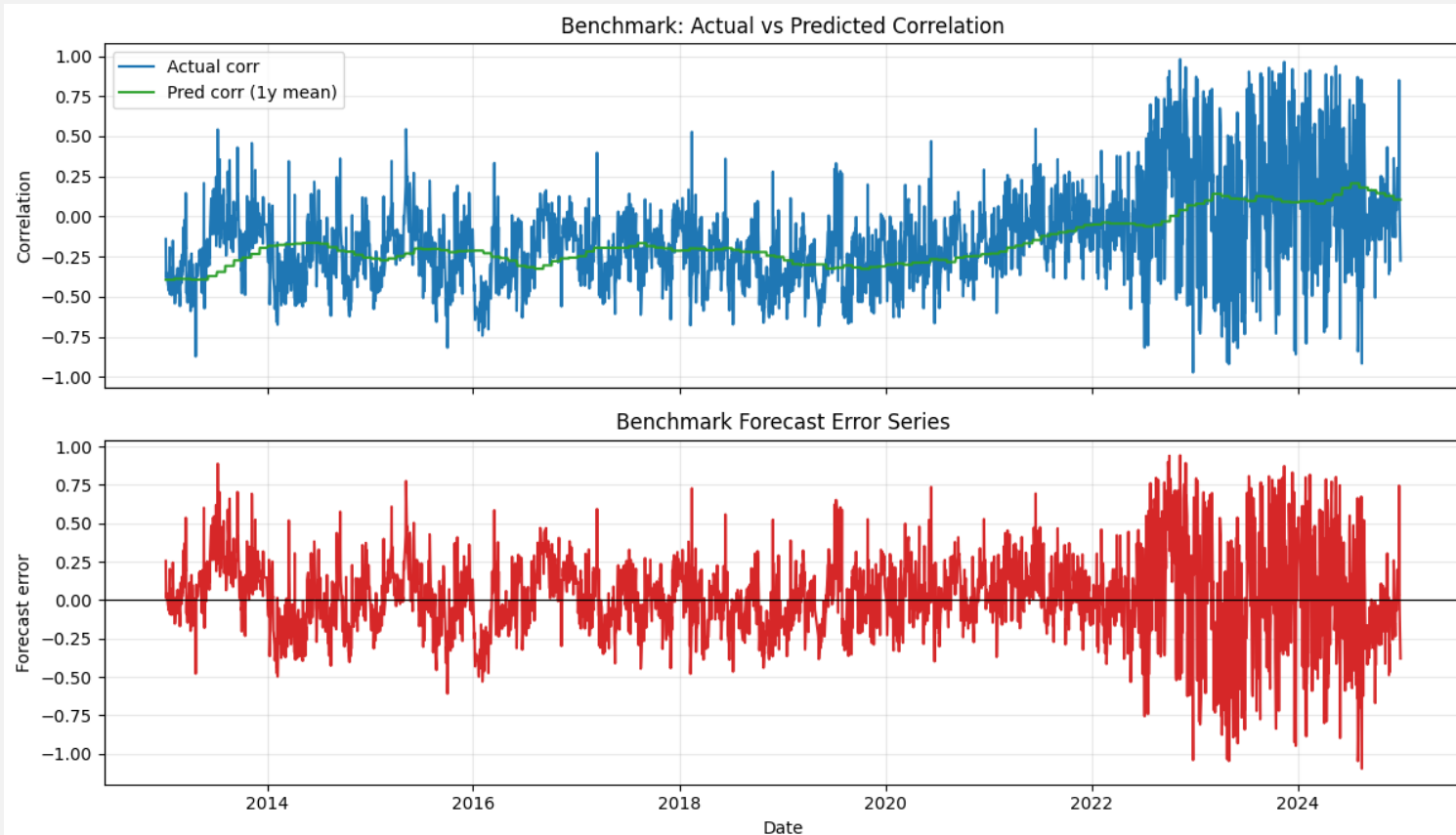


出典：Hu, et al.(2025) “The Stock-Bond Correlation: A Tale of Two Days in the U.S. Treasury Market”



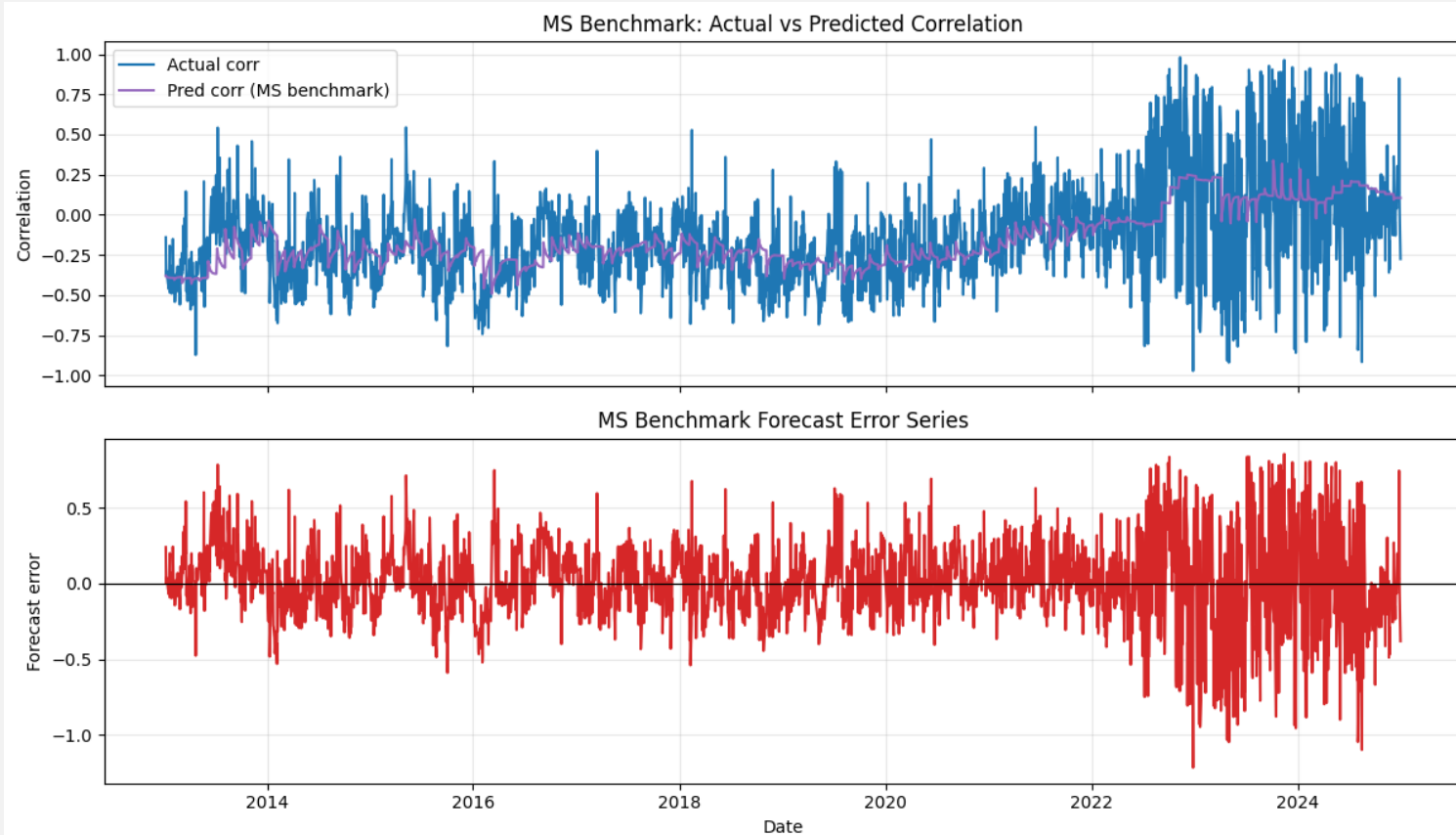
Appendix

■ 推定誤差の時系列を見ていく



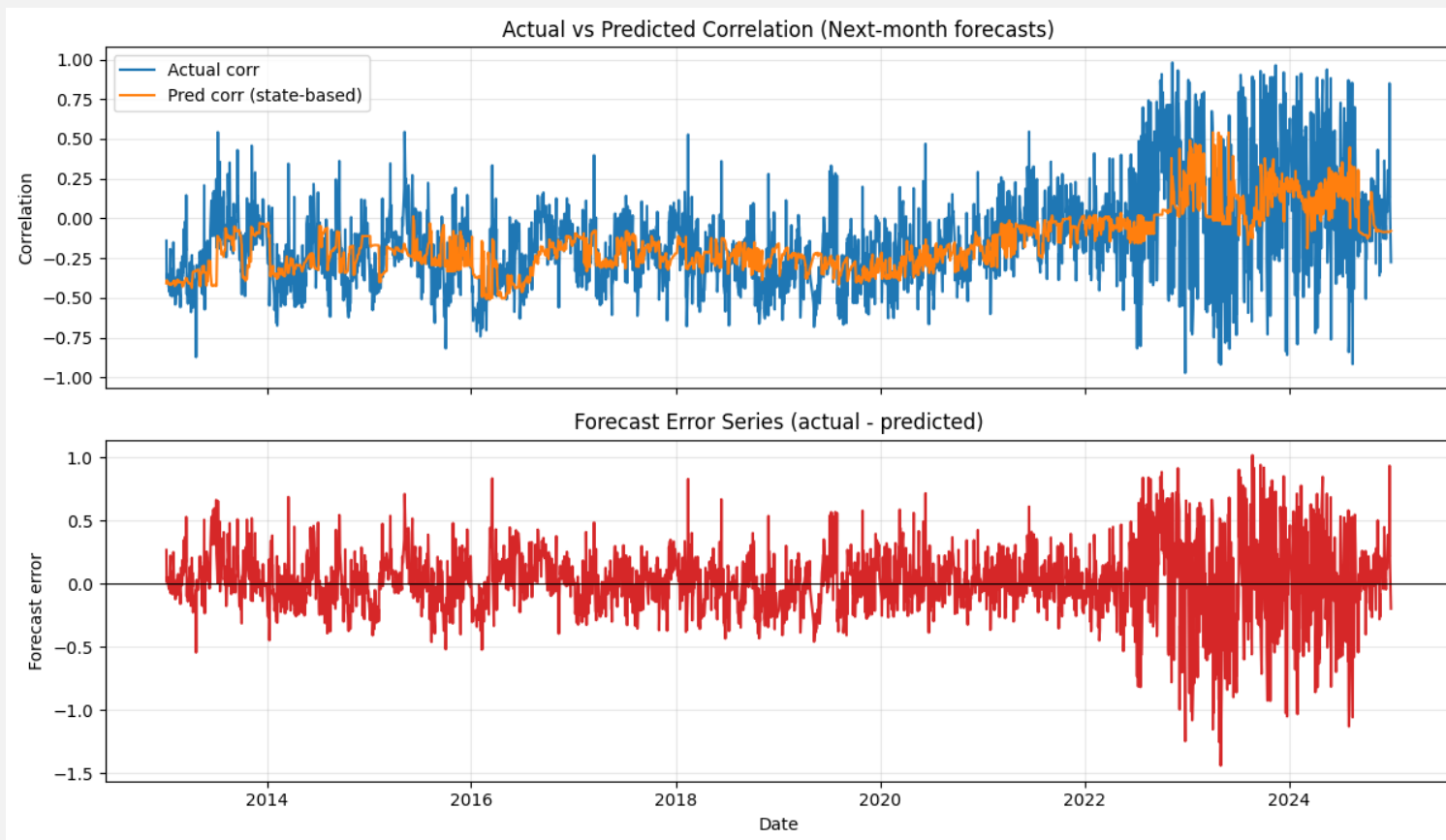
Benchmarkは推定誤差が1~-1の間で推移

■ 推定誤差の時系列を見ていく



概観としてBenchmarkはよりも推定誤差の範囲が狭くなっていることを確認

■ 推定誤差の時系列を見ていく



概観としてModel2はModel1よりもそこまで推定誤差が改善されている様子は見られない。2022年以降のボラティリティが大きくなっている時に推定誤差が大きくなっている(予測精度が落ちている)

- State 1が通常時、State 0が異常時のように分かれた

New Model : 株式と債券のリターン系列をフルサンプルで同時推定

State Dependent means

State	JB1	TP1
0	-0.000284	-0.000896
1	0.000107	0.000245

Transition Matrix

	State 0	State 1
State 0	0.855805	0.144195
State 1	0.027825	0.972175

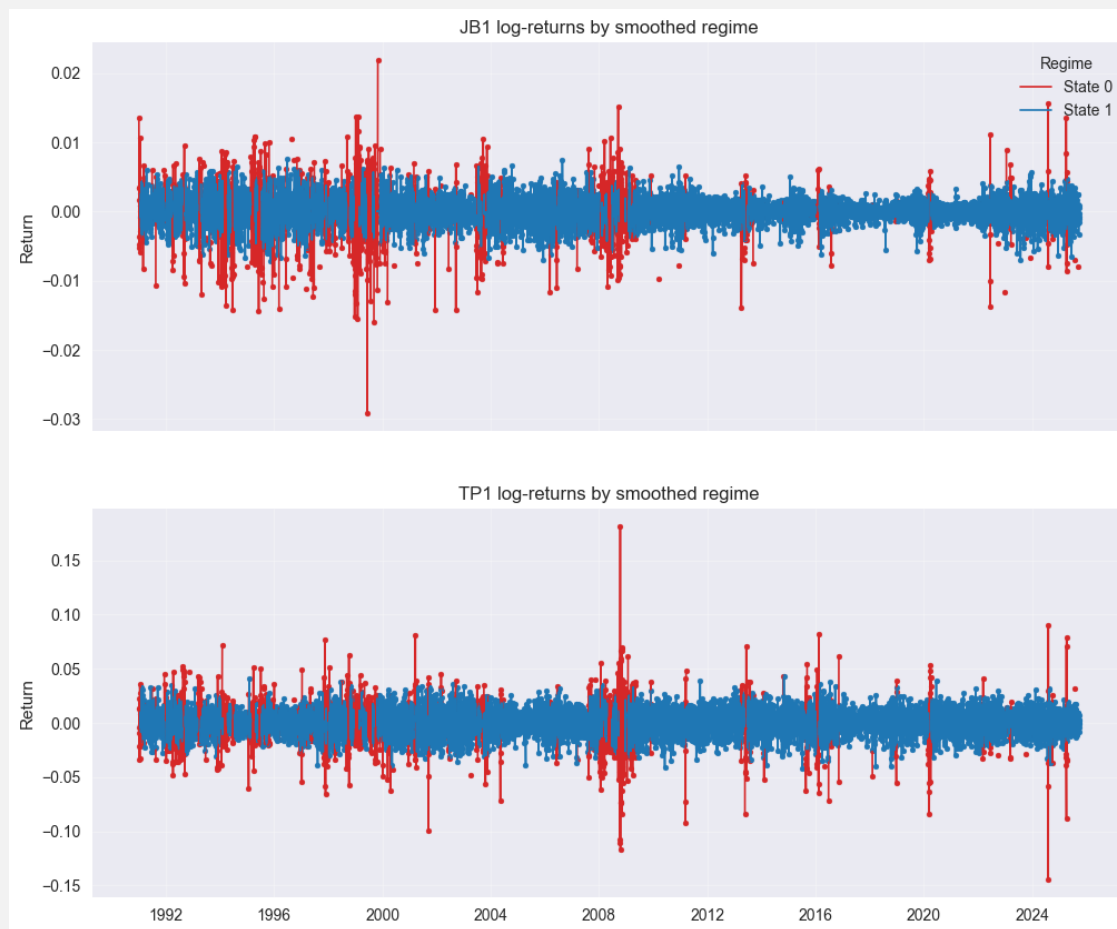
State-dependent covariance matrices: State 0

	JB1	TP1
JB1	0.000023	-0.000024
TP1	-0.000024	0.000641

State-dependent covariance matrices: State 1

	JB1	TP1
JB1	0.000004	-0.000004
TP1	-0.000004	0.000116

■ こちらも概ね識別できているのではないか



リターン系列をStateごとに色分けしてプロットした

■ 月末のラベルだからか、あまり上手く分類できていない

New Modelで推定されたstate(月末)を用いて相関をラベリングした結果

