

2024 年 10 月 8 日

宮崎 浩一

霧生 拓也

渡辺 桂士

EXECUTIVE SUMMARY

- 公的年金などの長期投資においては、将来時点における資産額が必要水準を下回る確率（下方確率）に留意する必要がある。実際の運用においては、基本ポートフォリオを定め、適時適切にリバランスする。基本ポートフォリオの策定に際して、平均・分散モデルに基づく 1 期間最適化モデルを利用する場合には、このモデルから得られる基本ポートフォリオに忠実に運用を行った際の下方確率を確認しておくことが要請される。
- 本研究では、平均や分散といった 1 期間最適化モデルのパラメータと下方確率との対応関係を正規分布から明示的に把握するには、『データのサンプリング頻度と運用で想定されるリバランスの頻度が共に十分高い』条件が満たされればよいことを示し、リバランス頻度とサンプリング頻度の観点から長期投資における 1 期間最適化モデルの利用について検討する。

(注)本ワーキングペーパーは、GPIF 職員の研究成果をとりまとめたものであり、文章中で示された内容や意見は GPIF の公式見解を示すものではありません。また、本ワーキングペーパーの作成には、GPIF 職員の竹内光氏から有益なコメントを頂きました。ここに記して感謝します。

1. はじめに

ポートフォリオを構築する際には、モデル構築や解法上の容易さから、1 期間最適化モデルが中心的に採用されている。GPIF では、基本ポートフォリオ（詳しくは GPIF(2023)を参照されたい）から大きく逸脱することがないように、乖離許容幅内で資産運用を行っている。このため、大きな資産配分の変更といった投資の意思決定を行うのは、基本ポートフォリオを決定する時点となる。このような運用を前提に、1 期間最適化モデルを利用して基本ポートフォリオを構築している。ただし、公的年金などでは将来的に運用資産を年金支払いに充てることを想定しているため、1 期間最適化モデルを利用して定めた基本ポートフォリオに忠実に運用を行った際に、将来時点において想定される資産額が必要水準を下回る確率（下方確率）を確認しておく必要がある。

1 期間モデルで最も著名なものは、Markowitz(1952)によって提案された平均・分散モデルである。本多(2019)は、平均・分散モデルが資産市場の分析やポートフォリオ戦略の構築において、現在でも非常に有効な方法論を提供していることを説明している。本研究の課題である「サンプリング頻度」に密接に関連する部分を紹介する。本多(2019)が扱うテーマの 1 つに、平均・分散モデルで用いるパラメータの推定に関する問題があり、Levy/Roll(2010)や Kan/Zhou(2007)などの先行研究を踏まえ、パラメータを利用する際の注意点を指摘している。具体的には、「推定されたパラメータが不偏推定量であったとしても（真の値よりも大きめに推定されてしまう資産の数と小さめに推定されてしまう資産の数がおおよそ同じ程度になったとしても）、得られた推定値を平均・分散モデルの入力値として最適化計算を行ってしまうと、算出される最適ポートフォリオや効率的フロンティアはその範囲が拡大する傾向がある。」ことを指摘している。この指摘を踏まえると、推定されたパラメータに基づく最

適化を試みる際には、パラメータ値は、不偏性を有することに加えて、その信頼区間が出来るだけ小さいことが望まれる。よって、過去データからパラメータ推定する場合には、データのサンプリングにおいて十分な個数のリターンデータを確保することができるサンプリング頻度が必要である。

長期的な資金運用を基本ポートフォリオから大きく逸脱することがないように行うためには、運用ポートフォリオの構成割合が基本ポートフォリオの構成割合から乖離がみられる際に、適宜適切にリバランスを行う必要がある。システムティックなリバランスがパフォーマンスに与える影響(リバランスプレミアム)について分析した先行研究に清水・内山(2017)がある。幾何ブラウン運動モデルを仮定して市場から推定されたパラメータを用いたモンテカルロシミュレーションによるリバランスと、実際のリバランスから得られるリバランスプレミアムを比較のうえ、「投資機会が変動しない場合(推定されたパラメータを固定)」において、リバランスによるパフォーマンスの向上への寄与は限定的であるとしている。加えて、実際のリバランスから得られるリバランスプレミアムが有意に大きくなる場合には、リスクリバーサル(過去のパフォーマンスの低い資産が、その後長期的に高いパフォーマンスを出し、反対に、過去のパフォーマンスの高い資産は、その後低いパフォーマンスになるという現象)などの「投資機会の変動」による影響が大きいと示唆している。

本研究の目的は、平均や分散といった 1 期間最適化モデルのパラメータと下方確率との対応関係を正規分布から明示的に把握するには、『データのサンプリング頻度と運用で想定されるリバランスの頻度が共に十分高い』条件が満たされればよいことを示し、リバランス頻度とサンプリング頻度の観点から長期投資において 1 期間最適化モデルを利用する場合の注意点について検討することである。

本論文の構成は次の通りである。節 2 では、清水・内山(2017)と同様に幾何ブラウン運動モデルを採用し、本研究の目的を踏まえて、リバランス頻度(連続リバランスと Buy and Hold)についての考え方を整理する。節 3 では、幾何ブラウン運動を離散化して、リバランス頻度と(パラメータ推定に用いるリターンデータの)サンプリング頻度をもたらす下方確率への影響をより明示的に捉える。節 4 では、数値例に基づき、サンプリング頻度の違いによるパラメータの信頼区間の大きさの違いについて確認する。最終節では、まとめと今後の課題を付す。

2. 各資産が幾何ブラウン運動に従うケース

2.1 幾何ブラウン運動とリバランス頻度

各資産 i , ($i = 1, 2, 3, 4$) の時点 t における価格 S_t^i が式(1)の幾何ブラウン運動に従うものとする。

$$\frac{dS_t^i}{S_t^i} = \mu^i dt + \sigma^i dB_t^i \quad (1)$$

ここで、 B_t^i は標準ブラウン運動、 $dB_t^i \cdot dB_t^j dt = \rho_{i,j} dt$ である。ブラウン運動の詳細については森村・木島(1991)を参照されたい。

ポートフォリオで取り扱うために、4 資産(現在の GPIF の基本ポートフォリオが 4 つの資産クラスで構成されているため、4 資産を想定するが、一般の場合でも同じ議論が成り立つ)のウェイトベクトル $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3, w_4)$ 、ドリフトベクトル $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)$ と拡散行列 $\boldsymbol{\Omega}$ を導入する。

(連続リバランスのケース)

式(1)に基づけば、ウェイト \mathbf{w} のポートフォリオリターンが従う確率過程は、式(2)となる。

$$\begin{aligned}\frac{dS_t^P}{S_t^P} &= \sum_{i=1}^4 w_i \frac{dS_t^i}{S_t^i} = \sum_{i=1}^4 w_i (\mu^i dt + \sigma^i dB_t^i) \\ &= \left(\sum_{i=1}^4 w_i \mu^i \right) dt + \sum_{i=1}^4 w_i \sigma^i dB_t^i = \mathbf{w}\boldsymbol{\mu}^T dt + \sqrt{\mathbf{w}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{w}^T} dB_t\end{aligned}\quad (2)$$

式(2)は、全ての時点 t において、次の微小時間 dt においてポートフォリオリターンが従う分布は、 $N(\mathbf{w}\boldsymbol{\mu}^T dt, \mathbf{w}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{w}^T dt)$ であることを意味する。これは、常にどの瞬間においてもポートフォリオのウエイトが \mathbf{w} で維持され続けていること、つまり、ポートフォリオが連続リバランスされることを意味する。

式(2)が常に満足するような運用(つまり、連続リバランス)をすれば、時点0の総資産額 S_0^P は、時点 t には式(2)を積分して得られる式(3)の S_t^P となる。

$$S_t^P = S_0^P e^{(\mathbf{w}\boldsymbol{\mu}^T - \frac{1}{2}\mathbf{w}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{w}^T)t + \sqrt{\mathbf{w}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{w}^T} B_t} \quad (3)$$

式(3)を用いると、時点0から時点 t までのポートフォリオグロスリターン(時点0において1単位金額を投資したものが時点 t に幾らになっているかを表す) $R_{0 \rightarrow t}^P$ を表す確率変数は、式(4)で与えられる。

$$R_{0 \rightarrow t}^P = \frac{S_t^P}{S_0^P} = e^{(\mathbf{w}\boldsymbol{\mu}^T - \frac{1}{2}\mathbf{w}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{w}^T)t + \sqrt{\mathbf{w}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{w}^T} B_t} \quad (4)$$

式(4)から、ポートフォリオグロスリターン $R_{0 \rightarrow t}^P$ の期待値 $E(R_{0 \rightarrow t}^P)$ と分散 $V(R_{0 \rightarrow t}^P)$ は、それぞれ、式(5)、式(6)となる。

$$\begin{aligned}E(R_{0 \rightarrow t}^P) &= E\left(e^{(\mathbf{w}\boldsymbol{\mu}^T - \frac{1}{2}\mathbf{w}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{w}^T)t + \sqrt{\mathbf{w}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{w}^T} B_t}\right) = e^{(\mathbf{w}\boldsymbol{\mu}^T - \frac{1}{2}\mathbf{w}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{w}^T)t} E\left(e^{\sqrt{\mathbf{w}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{w}^T} B_t}\right) \\ &= e^{(\mathbf{w}\boldsymbol{\mu}^T - \frac{1}{2}\mathbf{w}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{w}^T)t} e^{\left(\frac{1}{2}\mathbf{w}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{w}^T\right)t} = e^{(\mathbf{w}\boldsymbol{\mu}^T)t}\end{aligned}\quad (5)$$

$$\begin{aligned}V(R_{0 \rightarrow t}^P) &= V\left(e^{(\mathbf{w}\boldsymbol{\mu}^T - \frac{1}{2}\mathbf{w}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{w}^T)t + \sqrt{\mathbf{w}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{w}^T} B_t}\right) = e^{2(\mathbf{w}\boldsymbol{\mu}^T - \frac{1}{2}\mathbf{w}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{w}^T)t} V\left(e^{\sqrt{\mathbf{w}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{w}^T} B_t}\right) \\ &= e^{2(\mathbf{w}\boldsymbol{\mu}^T - \frac{1}{2}\mathbf{w}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{w}^T)t} \left(E\left(\left(e^{\sqrt{\mathbf{w}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{w}^T} B_t}\right)^2\right) - \left(E\left(e^{\sqrt{\mathbf{w}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{w}^T} B_t}\right)\right)^2 \right) \\ &= e^{2(\mathbf{w}\boldsymbol{\mu}^T - \frac{1}{2}\mathbf{w}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{w}^T)t} \left(E\left(e^{2\sqrt{\mathbf{w}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{w}^T} B_t}\right) - \left(E\left(e^{\sqrt{\mathbf{w}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{w}^T} B_t}\right)\right)^2 \right) \\ &= e^{2(\mathbf{w}\boldsymbol{\mu}^T - \frac{1}{2}\mathbf{w}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{w}^T)t} \left(e^{2(\mathbf{w}\boldsymbol{\mu}^T - \frac{1}{2}\mathbf{w}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{w}^T)t} - \left(E\left(e^{\sqrt{\mathbf{w}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{w}^T} B_t}\right)\right)^2 \right) \\ &= e^{2\mathbf{w}\boldsymbol{\mu}^T t} (e^{\mathbf{w}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{w}^T t} - 1)\end{aligned}\quad (6)$$

式(4)から、ポートフォリオ対数リターン $\ln(R_{0 \rightarrow t}^P)$ の期待値 $E(\ln(R_{0 \rightarrow t}^P))$ と分散 $V(\ln(R_{0 \rightarrow t}^P))$ は、それぞれ、式(7)、式(8)となる。

$$E(\ln(R_{0 \rightarrow t}^P)) = E\left(\left(\mathbf{w}\boldsymbol{\mu}^T - \frac{1}{2}\mathbf{w}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{w}^T\right)t + \sqrt{\mathbf{w}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{w}^T} B_t\right) = \left(\mathbf{w}\boldsymbol{\mu}^T - \frac{1}{2}\mathbf{w}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{w}^T\right)t \quad (7)$$

$$V(\ln(R_{0 \rightarrow t}^P)) = V\left(\left(\mathbf{w}\boldsymbol{\mu}^T - \frac{1}{2}\mathbf{w}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{w}^T\right)t + \sqrt{\mathbf{w}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{w}^T} B_t\right) = \mathbf{w}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{w}^T t \quad (8)$$

ここまでの議論を整理する。各資産 i , ($i = 1, 2, 3, 4$)の時点 t における価格 S_t^i が式(1)の幾何ブラウン運動に従い、ポートフォリオのウエイトを常に \mathbf{w} に維持するために時点0から時点 t まで連続リバランスを行い運用した場合には、時点0においてポートフォリオの額が1であったものが、時点 t においては、 $R_{0 \rightarrow t}^P$ となり、このポートフォリオの

額の期待値は式(5)の $E(R_{0 \rightarrow t}^P) = e^{(\mathbf{w}\boldsymbol{\mu}^T)t}$ 、ポートフォリオの額の分散は式(6)の $V(R_{0 \rightarrow t}^P) = e^{2\mathbf{w}\boldsymbol{\mu}^T t}(e^{\mathbf{w}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{w}^T t} - 1)$ となる。また、 $R_{0 \rightarrow t}^P$ が従う確率分布は、確率変数 $X \sim N\left(\left(\mathbf{w}\boldsymbol{\mu}^T - \frac{1}{2}\mathbf{w}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{w}^T\right)t, (\mathbf{w}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{w}^T)t\right)$ を用いて、 $R_{0 \rightarrow t}^P = e^X$ が従う対数正規分布となる。時点 t において、ポートフォリオの額 $R_{0 \rightarrow t}^P$ が閾値 K を下回る確率は、 $P(R_{0 \rightarrow t}^P \leq K) = P(\ln(R_{0 \rightarrow t}^P) \leq \ln(K)) = P(X \leq \ln(K))$ で与えられる。よって、下方確率が厳密に(近似を使わずに)求められる。

(リバランスを行わないケース)

次に、時点 0 から時点 t までリバランスを行わなかった場合のポートフォリオグロスリターンについて考える。各資産 i , ($i = 1, 2, 3, 4$)において、時点 0 の資産額 S_0^i は、時点 t には式(1)を積分して得られる式(9)の S_t^i となる。

$$S_t^i = S_0^i e^{(\mu^i - \frac{1}{2}\sigma^{i2})t + \sigma^i B_t^i} \quad (9)$$

これを用いると、時点 0 のポートフォリオの資産額 S_0^P は、時点 t には式(10)の $S_t^{P,N}$ となる。

$$S_t^{P,N} = \sum_{i=1}^4 S_0^i e^{(\mu^i - \frac{1}{2}\sigma^{i2})t + \sigma^i B_t^i} \quad (10)$$

ここで、 $S_0^i = w_i S_0^P$ である。

式(10)を用いると、時点 0 から時点 t までのポートフォリオグロスリターン $R_{0 \rightarrow t}^{P,N}$ を表す確率変数は、式(11)で与えられる。

$$R_{0 \rightarrow t}^{P,N} = \frac{S_t^{P,N}}{S_0^P} = \sum_{i=1}^4 w_i e^{(\mu^i - \frac{1}{2}\sigma^{i2})t + \sigma^i B_t^i} \quad (11)$$

式(11)からポートフォリオグロスリターン $R_{0 \rightarrow t}^{P,N}$ の期待値 $E(R_{0 \rightarrow t}^{P,N})$ と分散 $V(R_{0 \rightarrow t}^{P,N})$ は、それぞれ、式(12)、式(13)となる。

$$\begin{aligned} E(R_{0 \rightarrow t}^{P,N}) &= E\left(\sum_{i=1}^4 w_i e^{(\mu^i - \frac{1}{2}\sigma^{i2})t + \sigma^i B_t^i}\right) = \sum_{i=1}^4 w_i E\left(e^{(\mu^i - \frac{1}{2}\sigma^{i2})t + \sigma^i B_t^i}\right) \\ &= \sum_{i=1}^4 w_i e^{\mu^i t} \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} V(R_{0 \rightarrow t}^{P,N}) &= V\left(\sum_{i=1}^4 w_i e^{(\mu^i - \frac{1}{2}\sigma^{i2})t + \sigma^i B_t^i}\right) \\ &= \sum_{i=1}^4 w_i^2 e^{2\mu^i t} (e^{\sigma^{i2} t} - 1) + 2 \sum_{i \neq j} w_i w_j e^{(\mu^i + \mu^j)t} (e^{\rho_{i,j} \sigma^i \sigma^j t} - 1) \end{aligned} \quad (13)$$

時点 0 におけるポートフォリオの額を1とすると、時点 0 から時点 t までリバランスを全くしなかった場合に、時点 t における下方確率は、形式的に $P(R_{0 \rightarrow t}^{P,N} \leq K)$ で与えられるが、対数正規分布には正規分布のような再生性はなく、時点 t におけるポートフォリオの額 $R_{0 \rightarrow t}^{P,N}$ の分布が分からないためこれを正確に計算するのは容易でない。1 期間最適化モデルのパラメータとの対応関係を調べるため、 $\mu^i t$ などを微小量と仮定して、期待値の式(12)の右辺を $e^{\mu^i t}$ のマクローリン展開 ($e^x \cong 1 + x$)により 1 次近似すると式(14)を得る。

$$\begin{aligned} E(R_{0 \rightarrow t}^{P,N}) &= \sum_{i=1}^4 w_i e^{\mu^i t} \cong \sum_{i=1}^4 w_i (1 + \mu^i t) = \sum_{i=1}^4 w_i + \sum_{i=1}^4 w_i \mu^i t \\ &= 1 + \mathbf{w}\boldsymbol{\mu}^T t \end{aligned} \quad (14)$$

分散の式(13)の右辺を1次近似する。 $e^{2\mu t} \cong 1$ とみなし、 $\sigma^i t$ などを微小量と仮定して、分散の式(13)の右辺を $e^{\sigma^i t}$ などのマクローリン展開($e^x \cong 1 + x$)により1次近似すると式(15)を得る。

$$\begin{aligned} V(R_{0 \rightarrow t}^{P,N}) &= \sum_{i=1}^4 w_i^2 e^{2\mu t} (e^{\sigma_i^2 t} - 1) + 2 \sum_{i \neq j} w_i w_j e^{(\mu^i + \mu^j)t} (e^{\rho_{i,j} \sigma^i \sigma^j t} - 1) \\ &\cong \sum_{i=1}^4 w_i^2 \sigma_i^2 t + 2 \sum_{i \neq j} w_i w_j \rho_{i,j} \sigma^i \sigma^j t = (\mathbf{w} \boldsymbol{\Omega} \mathbf{w}^T) t \end{aligned} \quad (15)$$

このように、リバランスを全くしない場合は、近似式の形でポートフォリオの額 $R_{0 \rightarrow t}^{P,N}$ の期待値や分散を求めることができる。ただし、運用期間が t が長くなるにしたがって近似精度は急速に悪くなる。

3. 各資産のリターンが正規分布に従う離散モデル

3.1 幾何ブラウン運動の離散化とデータサンプリング頻度

各資産 i , ($i = 1, 2, 3, 4$) の価格 S_k^i が幾何ブラウン運動に従う場合に、これを離散化して得られるリターン X_k^i は式(16)の正規分布に従う。¹

$$X_{k,\Delta t}^i = \frac{S_{k+\Delta t}^i - S_k^i}{S_k^i} = \mu_{\Delta t}^i \Delta t + \sigma_{\Delta t}^i \varepsilon_{k,\Delta t}^i \quad (16)$$

ここで、 $\varepsilon_{k,\Delta t}^i$ は、平均が0、分散が Δt の時系列的に独立な正規分布に従うものと仮定する。また、資産間の相関構造は $\text{Cov}(\varepsilon_{k,\Delta t}^i, \varepsilon_{k,\Delta t}^j) = \rho_{i,j}$ であり、時系列的なクロス相関は無いものとする。この離散モデルを用いる場合、データサンプリング頻度が少なくなると、式(1)で与えられる連続モデルに対する近似精度は低下する。日次 ($\Delta t = 1/252$) のサンプリング頻度を利用する場合には、日次でサンプリングされた資産価格から式(16)の左辺を用いて日次リターンの時系列データを作成したうえで、その期待値と標準偏差をとれば推定値 $\mu_{1/252}^i$ と $\sigma_{1/252}^i$ がそれぞれ得られる。データを月次 ($\Delta t = 1/12$)、四半期次 ($\Delta t = 1/4$)、半年次 ($\Delta t = 1/2$)、年次 ($\Delta t = 1$) でサンプリングする場合でも考え方は同様である。

3.2 リバランスとデータサンプリングの頻度

ここでは、離散化された幾何ブラウン運動を用いて、リバランス頻度とデータサンプリングの頻度について検討する。まず、データのサンプリング頻度を半年次(年2回サンプル)とし、1年間(前半の半年と後半の半年)の運用を試みる場合からはじめて、年 N 回サンプルの場合に拡張したうえで、リバランスを行う場合と、リバランスを行わない

¹ 本研究では、リバランス頻度とサンプリング頻度が、将来時点における下方確率を精確に導出する際に与える影響を検討するため、離散モデルとして、式(16)のような連続モデルの離散化(算術リターンが正規分布に従う)を選択した。別の離散モデルとして、式(16')のように、対数リターンが正規分布に従うとするモデル(これは宮崎(2005)にある、Box-Cox 変換後の差分が正規分布に従うとするモデルに内包される)もある。式(16')によるモデル化は、多期間リターンが1期間リターンの和で記述できる一方で、ポートフォリオのリターンの取り扱いが複雑になる(正規分布や対数正規分布にならない)ため本研究では利用しない。

$$X_{k,\Delta t}^i = \ln \left(\frac{S_{k+\Delta t}^i}{S_k^i} \right) = \mu_{\Delta t}^i \Delta t + \sigma_{\Delta t}^i \varepsilon_{k,\Delta t}^i \quad (16')$$

場合において下方確率の導出過程を比較する。

各資産 i , ($i = 1, 2, 3, 4$) の価格 $S_{n,1/2}^i$ から前半及び後半の半年間に得られるリターンを式(16)において、それぞれ、 $k = 1, 2$ とした $X_{1,1/2}^i, X_{2,1/2}^i$ で表す。

(データサンプリング頻度に合わせてリバランスを行う場合)

式(16)の記法を用いて、1 単位時間を半年間にとると、1 つ(1 期間)のリターンは半年間のリターンとなり、期初のウエイトが w であるポートフォリオの半年間のリターンは $\sum_{i=1}^4 w_i X_{1,1/2}^i$ となる。現時点のポートフォリオ額を $S_{0,1/2}^P$ と記すと、半年後、1 年後におけるポートフォリオの額は、それぞれ、 $S_{1,1/2}^P, S_{2,1/2}^P$ で表される。期初のウエイトが w であるポートフォリオの半年間のリターンが $\sum_{i=1}^4 w_i X_{1,1/2}^i$ であることを踏まえると、半年後や 1 年後におけるポートフォリオの額 $S_{1,1/2}^P, S_{2,1/2}^P$ とリターン $X_{1,1/2}^i, X_{2,1/2}^i$ との関係は、式(17)、式(18)で表される。

$$S_{1,1/2}^P = S_{0,1/2}^P \left(1 + \sum_{i=1}^4 w_i X_{1,1/2}^i \right) \quad (17)$$

$$S_{2,1/2}^P = S_{1,1/2}^P \left(1 + \sum_{i=1}^4 w_i X_{2,1/2}^i \right) \quad (18)$$

式(17)、式(18)を用いると、時点 0 (現時点) から時点 2 (1 年後) までのポートフォリオグロスリターン(時点 0 において 1 単位金額を投資したものが時点 2 に幾らになっているかを表す) $R_{0 \rightarrow 2,1/2}^P$ を表す確率変数は、式(19)で与えられる。(連続モデルの式(4)に対応)

$$\begin{aligned} R_{0 \rightarrow 2,1/2}^P &= \frac{S_{2,1/2}^P}{S_{0,1/2}^P} = \frac{S_{0,1/2}^P (1 + \sum_{i=1}^4 w_i X_{1,1/2}^i) (1 + \sum_{i=1}^4 w_i X_{2,1/2}^i)}{S_{0,1/2}^P} \\ &= \left(1 + \sum_{i=1}^4 w_i X_{1,1/2}^i \right) \left(1 + \sum_{i=1}^4 w_i X_{2,1/2}^i \right) \end{aligned} \quad (19)$$

1 単位時間を $1/N$ 年間にとると、1 つ(1 期間)のリターンは $1/N$ 年間のリターンとなり、これを $X_{j,1/N}^i$ と記述すると、時点 0 (現時点) から時点 N (1 年後) までのポートフォリオグロスリターン(時点 0 において 1 単位金額を投資したものが時点 N に幾らになっているかを表す) $R_{0 \rightarrow N,1/N}^P$ を表す確率変数は、式(20)で与えられる。

$$R_{0 \rightarrow N,1/N}^P = \frac{S_{N,1/N}^P}{S_{0,1/N}^P} = \prod_{j=1}^N \left(1 + \sum_{i=1}^4 w_i X_{j,1/N}^i \right) \quad (20)$$

時点 N において、ポートフォリオの額 $R_{0 \rightarrow N,1/N}^P$ が閾値 K を下回る確率は、 $P(R_{0 \rightarrow N,1/N}^P \leq K) = P(\prod_{j=1}^N (1 + \sum_{i=1}^4 w_i X_{j,1/N}^i) \leq K) = P(\log(\prod_{j=1}^N (1 + \sum_{i=1}^4 w_i X_{j,1/N}^i)) \leq \log K) = P(\sum_{j=1}^N \log(1 + \sum_{i=1}^4 w_i X_{j,1/N}^i) \leq \log K) \cong P(\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^4 w_i X_{j,1/N}^i \leq \log K)$ で与えられる。サンプリング頻度 N が十分に大きく $\sum_{i=1}^4 w_i X_{j,1/N}^i$ が十分に小さいなら、 $\log(1 + \sum_{i=1}^4 w_i X_{j,1/N}^i) \cong \sum_{i=1}^4 w_i X_{j,1/N}^i$ の近似が成立する。ここで、確率変数 $\sum_{i=1}^4 w_i X_{1,1/N}^i$ が従う分布は、リターンデータとして $1/N$ 年間のリターンを用いて求めた期待値と分散共分散行列、それぞれ、 $\boldsymbol{\mu}_{1/N} = (\mu_{1,1/N}, \mu_{2,1/N}, \mu_{3,1/N}, \mu_{4,1/N})$ と拡散行列 $\boldsymbol{\Omega}_{1/N}$ から導かれる期待値 $w\boldsymbol{\mu}_{1/N}^T$ と分散 $w\boldsymbol{\Omega}_{1/N}w^T$ を持つ正規分布に従う。このようにリバランスを行うケースでは、サンプリング頻度 N が十分に大きければ、下方確率を正規分布から精確に求めることができる。

(データサンプリング頻度に合わせたリバランスを行わない場合)

次に、時点 0 から時点 2 までリバランスを行わなかった場合のポートフォリオグロスリターンについて考える。

各資産 i , ($i = 1, 2, 3, 4$)において、時点 0 の資産額 $S_{0,1/2}^i$ は、時点 2 には式(21)の $S_{2,1/2}^i$ となる。

$$S_{2,1/2}^i = S_{0,1/2}^i (1 + X_{1,1/2}^i) (1 + X_{2,1/2}^i) \quad (21)$$

これを用いると、時点 0 の総資産額 S_0^P は、時点 2 には式(22)の $S_2^{P,N}$ となる。

$$S_{2,1/2}^{P,N} = S_{0,1/2}^P \sum_{i=1}^4 w_i (1 + X_{1,1/2}^i) (1 + X_{2,1/2}^i) \quad (22)$$

ここで、 $S_{0,1/2}^i = w_i S_{0,1/2}^P$ である。

式(22)を用いると、時点 0 から時点 2 までのポートフォリオグロスリターン $R_{0 \rightarrow 2,1/2}^{P,N}$ を表す確率変数は、式(23)で与えられる。

$$R_{0 \rightarrow 2}^{P,N} = \frac{S_2^{P,N}}{S_0^P} = \sum_{i=1}^4 w_i (1 + X_{1,1/2}^i) (1 + X_{2,1/2}^i) \quad (23)$$

1 単位時間を $1/N$ 年間にとると、1つ(1 期間)のリターンは $1/N$ 年間のリターンとなり、これを $X_{j,1/N}^i$ と記述すると、時点 0 (現在時点)から時点 N (1 年後)までのポートフォリオグロスリターン(時点 0 において1単位金額を投資したものが時点 N に幾らになっているかを表す) $R_{0 \rightarrow N,1/N}^P$ を表す確率変数は、式(24)で与えられる。

$$R_{0 \rightarrow N,1/N}^{P,N} = \frac{S_{N,1/N}^{P,N}}{S_{0,1/N}^P} = \sum_{i=1}^4 w_i \prod_{j=1}^N (1 + X_{j,1/N}^i) \quad (24)$$

時点 N において、下方確率は、 $P(R_{0 \rightarrow N}^{P,N} \leq K) = P(\sum_{i=1}^4 w_i \prod_{j=1}^N (1 + X_{j,1/N}^i) \leq K)$ で与えられる。リバランスを行う場合と異なり、ウェイト w_i が確率変数 $\prod_{j=1}^N (1 + X_{j,1/N}^i)$ の外にあるため、対数をとっても整理された形にならず、下方確率を正規分布から明示的に把握することはできない。

3.3 リバランス頻度とデータサンプリング頻度が等しい場合のインプリケーション

リバランス頻度とデータサンプリング頻度が等しいケースについて、 T 年間にわたって運用することを想定して、改めて1 期間最適化モデルを利用する際の注意点を指摘する。

(頻度が年次の場合)

年次の場合には、式(16)において $\Delta t = 1$ に設定すればよい。

$$X_{k,1}^i = \frac{S_{k+1,1}^i - S_{k,1}^i}{S_{k,1}^i} = \mu_1^i \cdot 1 + \sigma_1^i \varepsilon_{k,1}^i \quad (16, \Delta t = 1)$$

年次リターン $X_{k,1}^i$ の期待値と標準偏差は、それぞれ、 μ_1^i 、 σ_1^i となる。時点 0 (現在時点)から時点 T (T 年後)までのポートフォリオグロスリターン(時点 0 において1単位金額を投資したものが時点 T に幾らになっているかを表す) $R_{0 \rightarrow T,1}^P$ を表す確率変数は、式(25)で与えられる。

$$R_{0 \rightarrow T,1}^P = \frac{S_{T,1}^P}{S_{0,1}^P} = \prod_{j=1}^T \left(1 + \sum_{i=1}^4 w_i X_{j,1}^i \right) \quad (25)$$

時点 T において、ポートフォリオの額 $R_{0 \rightarrow T,1}^P$ が閾値 K を下回る確率は、 $P(R_{0 \rightarrow T,1}^P \leq K) = P(\prod_{j=1}^T (1 + \sum_{i=1}^4 w_i X_{j,1}^i) \leq K) = P(\log(\prod_{j=1}^T (1 + \sum_{i=1}^4 w_i X_{j,1}^i)) \leq \log K) = P(\sum_{j=1}^T \log(1 + \sum_{i=1}^4 w_i X_{j,1}^i) \leq \log K) \cong P(\sum_{j=1}^T \sum_{i=1}^4 w_i X_{j,1}^i \leq \log K)$ で与えられる。サンプリング頻度 $N = 1$ は低いため、 $\sum_{i=1}^4 w_i X_{j,1/N}^i$ が十分に小さ

いとはいえず、 $\log(1 + \sum_{i=1}^4 w_i X_{j,1/N}^i) \cong \sum_{i=1}^4 w_i X_{j,1/N}^i$ の近似はかなり粗いと思われる。また、確率変数 $\sum_{i=1}^4 w_i X_{j,1/N}^i$ が従う分布は、リターンデータとして T 年間の (T 個の) 年次リターンを用いて推定した期待値ベクトルと分散共分散行列、それぞれ、 $\boldsymbol{\mu}_1 = (\mu_{1,1}, \mu_{2,1}, \mu_{3,1}, \mu_{4,1})$ と拡散行列 $\boldsymbol{\Omega}_1$ から導かれる期待値 $\boldsymbol{w}\boldsymbol{\mu}_1^T$ と分散 $\boldsymbol{w}\boldsymbol{\Omega}_1\boldsymbol{w}^T$ を持つ正規分布に従う。節 4 の数値例で確認するように、年次でサンプリングされたリターンデータから得られるパラメータ推定値の信頼区間は相応に広く推定精度もかなり粗い。

(頻度が半年次($N = 2$)、四半期次($N = 4$)、月次($N = 12$)、週次($N = 52$)、日次($N = 252$)の場合)

$1/N$ 年次サンプリングの場合は、式(16)において $\Delta t = 1/N$ に設定すればよい。

$$X_{j,1/N}^i = \frac{S_{j+1,1/N}^i - S_{j,1/N}^i}{S_{j,1/N}^i} = \mu_{1/N}^i \cdot \frac{1}{N} + \sigma_{1/N}^i \varepsilon_{j,1/N}^i \quad (16, \Delta t = 1/N)$$

$1/N$ 年次リターン $X_{j,1/N}^i$ の期待値と標準偏差は、それぞれ、 $\mu_{1/N}^i/N$ 、 $\sigma_{1/N}^i/\sqrt{N}$ となる。時点 0 (現在時点) から時点 $N \cdot T$ (T 年後) までのポートフォリオグロスリターン (時点 0 において 1 単位金額を投資したものが時点 $N \cdot T$ に幾らになっているかを表す) $R_{0 \rightarrow N \cdot T, 1/N}^P$ を表す確率変数は、式(26)で与えられる。

$$R_{0 \rightarrow N \cdot T, 1/N}^P = \frac{S_{N \cdot T, 1/N}^P}{S_{0, 1/N}^P} = \prod_{j=1}^{N \cdot T} \left(1 + \sum_{i=1}^4 w_i X_{j, 1/N}^i \right) \quad (26)$$

時点 $N \cdot T$ (T 年後) において、ポートフォリオの額 $R_{0 \rightarrow N \cdot T, 1/N}^P$ が閾値 K を下回る確率は、 $P(R_{0 \rightarrow N \cdot T, 1/N}^P \leq K) = P(\prod_{j=1}^{N \cdot T} (1 + \sum_{i=1}^4 w_i X_{j, 1/N}^i) \leq K) = P(\log(\prod_{j=1}^{N \cdot T} (1 + \sum_{i=1}^4 w_i X_{j, 1/N}^i)) \leq \log K) = P(\sum_{j=1}^{N \cdot T} \log(1 + \sum_{i=1}^4 w_i X_{j, 1/N}^i) \leq \log K) \cong P(\sum_{j=1}^{N \cdot T} \sum_{i=1}^4 w_i X_{j, 1/N}^i \leq \log K)$ で与えられる。ここで、サンプリング頻度 N を高くするに従って、 $\sum_{i=1}^4 w_i X_{j, 1/N}^i$ は小さくなり、 $\log(1 + \sum_{i=1}^4 w_i X_{j, 1/N}^i) \cong \sum_{i=1}^4 w_i X_{j, 1/N}^i$ の近似精度は高まる。ここで、確率変数 $\sum_{i=1}^4 w_i X_{j, 1/N}^i$ が従う分布は、リターンデータとして T 年間の ($N \cdot T$ 個の) $1/N$ 年次リターンを用いて求めた期待値ベクトル ($\boldsymbol{\mu}_{1/N} = (\mu_{1,1/N}, \mu_{2,1/N}, \mu_{3,1/N}, \mu_{4,1/N})$) と分散共分散行列 ($\boldsymbol{\Omega}_{1/N}$) から導かれる期待値 $\boldsymbol{w}\boldsymbol{\mu}_{1/N}^T$ と分散 $\boldsymbol{w}\boldsymbol{\Omega}_{1/N}\boldsymbol{w}^T$ を持つ正規分布に従う。

このように、リバランス頻度とデータサンプリング頻度が等しい場合、年次、半年次、月次、週次、日次の何れの頻度であっても、将来時点における下方確率を近似的に正規分布から求めることができる。先にみた「 T 個の年次リターンから得られるパラメータ (期待値 $\boldsymbol{w}\boldsymbol{\mu}_1^T$ 、分散 $\boldsymbol{w}\boldsymbol{\Omega}_1\boldsymbol{w}^T$) に対する信頼区間の大きさ」に対して、「 $N \cdot T$ 個の N 次リターンから得られるパラメータ (期待値 $\boldsymbol{w}\boldsymbol{\mu}_{1/N}^T$ 、分散 $\boldsymbol{w}\boldsymbol{\Omega}_{1/N}\boldsymbol{w}^T$) に対する信頼区間」は、サンプリング頻度 N を高くするに従って縮小する。

これまでの議論を踏まえると、平均や分散といった 1 期間最適化モデルのパラメータと下方確率との対応関係を正規分布から明示的に把握するには、『データのサンプリング頻度と運用で想定されるリバランスの頻度が共に十分高い』条件が満たされればよい。

4. 数値例

節 1 では、先行研究として本多(2019)を紹介し、推定されたパラメータに基づく最適化を試みる際には、パラメータ値は、不偏性を有することに加えて、その信頼区間が出来るだけ小さいことが望まれるため、十分な個数のリターンデータを確保することができるサンプリング頻度が必要であることを指摘した。また、節3において、リバランス頻度とデータサンプリング頻度が等しい場合、 T 年後の下方確率が近似的に、 $P(\sum_{j=1}^T \sum_{i=1}^4 w_i X_{j,1}^i \leq \log K)$ (年

次の場合)、 $P(\sum_{j=1}^{N \cdot T} \sum_{i=1}^4 w_i X_{j,1/N}^i \leq \log K)$ ($1/N$ 年次の場合)で与えられることを示した。下方確率の信頼区間は、対数関数の1次近似の他、正規分布に従う確率変数 $\sum_{j=1}^T \sum_{i=1}^4 w_i X_{j,1/N}^i$ や $\sum_{j=1}^{N \cdot T} \sum_{i=1}^4 w_i X_{j,1/N}^i$ の期待値や分散に関する推定区間の影響を受ける。

数値例においては、正規分布に従うリターンデータとして、 $1/N$ 年次サンプリングした T 年間にわたる $N \cdot T$ 個のリターンデータ $X_{j,1/N}$ を想定する。サンプリング頻度は、年次、半年次、四半期次、月次、週次、日次($N = 1, 2, 4, 12, 52, 252$)を対象とし、リターンデータの年数は、5年間と25年間($T = 5, 25$)を対象とし、これらのリターンデータセットから求めた期待値と標準偏差の信頼区間について検討する。期待値と標準偏差の信頼区間に関して、詳しくは、野田・宮岡(1990)などを参照されたい。

(期待値の信頼区間)

$1/N$ 年次サンプリングした T 年間にわたる $N \cdot T$ 個のリターンデータ $X_{j,1/N}$ から推定される期待値と不偏分散をそれぞれ、 $\bar{X}_{1/N}$ 、 $U_{1/N}^2$ で表すと、それぞれ、式(27)、式(28)で与えられる。

$$\bar{X}_{1/N} = \frac{1}{N \cdot T} \sum_{j=1}^{N \cdot T} X_{j,1/N} \quad (27)$$

$$U_{1/N}^2 = \frac{1}{N \cdot T - 1} \sum_{j=1}^{N \cdot T} (X_{j,1/N} - \bar{X}_{1/N})^2 \quad (28)$$

真の $1/N$ 年次リターンの期待値を $\mu_{1/N}$ で表すと、 $\frac{\bar{X}_{1/N} - \mu_{1/N}}{U_{1/N}^2 / \sqrt{N \cdot T}} \sim t_{N \cdot T - 1}$ である。 $t_{N \cdot T - 1}$ は、自由度 $N \cdot T - 1$ の t 分布、 $t_{N \cdot T - 1, \frac{\alpha}{2}}$ を自由度 $N \cdot T - 1$ の t 分布の上側100($\alpha/2$)パーセント点とすると、式(29)を得る。

$$P\left(-t_{N \cdot T - 1, \frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{X}_{1/N} - \mu_{1/N}}{U_{1/N}^2 / \sqrt{N \cdot T}} \leq t_{N \cdot T - 1, \frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha \quad (29)$$

式(29)を書き直すと、式(30)を得る。

$$P\left(\bar{X}_{1/N} - t_{N \cdot T - 1, \frac{\alpha}{2}} \frac{U_{1/N}}{\sqrt{N \cdot T}} \leq \mu_{1/N} \leq \bar{X}_{1/N} + t_{N \cdot T - 1, \frac{\alpha}{2}} \frac{U_{1/N}}{\sqrt{N \cdot T}}\right) = 1 - \alpha \quad (30)$$

式(30)から、 $\mu_{1/N}$ の100($1 - \alpha$)%信頼区間は、 $\left[\bar{X}_{1/N} - t_{N \cdot T - 1, \frac{\alpha}{2}} \frac{U_{1/N}}{\sqrt{N \cdot T}}, \bar{X}_{1/N} + t_{N \cdot T - 1, \frac{\alpha}{2}} \frac{U_{1/N}}{\sqrt{N \cdot T}}\right]$ となる。式(30)の左辺の不等式に N を掛けた式(31)を用いて、年率換算した期待値 $N \cdot \mu_{1/N}$ の信頼区間を求める。

$$P\left(N \cdot \bar{X}_{1/N} - t_{N \cdot T - 1, \frac{\alpha}{2}} \frac{U_{1/N} \sqrt{N}}{\sqrt{T}} \leq N \cdot \mu_{1/N} \leq N \cdot \bar{X}_{1/N} + t_{N \cdot T - 1, \frac{\alpha}{2}} \frac{U_{1/N} \sqrt{N}}{\sqrt{T}}\right) = 1 - \alpha \quad (31)$$

つまり、年率換算した期待値 $N \cdot \mu_{1/N}$ の信頼区間は、式(32)で与えられる。

$$P\left[N \cdot \bar{X}_{1/N} - t_{N \cdot T - 1, \frac{\alpha}{2}} \frac{U_{1/N} \sqrt{N}}{\sqrt{T}}, N \cdot \bar{X}_{1/N} + t_{N \cdot T - 1, \frac{\alpha}{2}} \frac{U_{1/N} \sqrt{N}}{\sqrt{T}}\right] \quad (32)$$

式(32)の $N \cdot \bar{X}_{1/N}$ において、 $1 \cdot \bar{X}_1 = 2 \cdot \bar{X}_{1/2} = 4 \cdot \bar{X}_{1/4} = 12 \cdot \bar{X}_{1/12} = 52 \cdot \bar{X}_{1/52} = 252 \cdot \bar{X}_{1/252}$ であること、 $U_{1/N} \sqrt{N}$ において、 $U_1 \sqrt{1} = U_{1/2} \sqrt{2} = U_{1/4} \sqrt{4} = U_{1/12} \sqrt{12} = U_{1/52} \sqrt{52} = U_{1/252} \sqrt{252}$ であることに注意すると、サンプリング頻度の違いが年率換算した期待値の信頼区間に本質的な影響を与えるのは、信頼係数となる $t_{N \cdot T - 1, \frac{\alpha}{2}}$ の自由度である。

(分散の信頼区間)

真の $1/N$ 年次リターンの分散を $\sigma_{1/N}^2$ で表すと、 $\frac{\sum_{j=1}^{N \cdot T} (X_{j,1/N} - \bar{X}_{1/N})^2}{\sigma_{1/N}^2} \sim \chi_{N \cdot T - 1}^2$ 、 $\chi_{N \cdot T - 1}^2$ は、自由度 $N \cdot T - 1$ のカイ二乗分布、 $\chi_{N \cdot T - 1, \alpha/2}^2$ を自由度 $N \cdot T - 1$ のカイ二乗分布の上側 $100(\alpha/2)$ パーセント点とすると、式(33)を得る。

$$P\left(\chi_{N \cdot T - 1, 1 - \alpha/2}^2 \leq \frac{\sum_{j=1}^{N \cdot T} (X_{j,1/N} - \bar{X}_{1/N})^2}{\sigma_{1/N}^2} \leq \chi_{N \cdot T - 1, \alpha/2}^2\right) = 1 - \alpha \quad (33)$$

式(33)を書き直すと、式(34)を得る。

$$P\left(\frac{\sum_{j=1}^{N \cdot T} (X_{j,1/N} - \bar{X}_{1/N})^2}{\chi_{N \cdot T - 1, \alpha/2}^2} \leq \sigma_{1/N}^2 \leq \frac{\sum_{j=1}^{N \cdot T} (X_{j,1/N} - \bar{X}_{1/N})^2}{\chi_{N \cdot T - 1, 1 - \alpha/2}^2}\right) = 1 - \alpha \quad (34)$$

式(34)から、 $\sigma_{1/N}^2$ の $100(1 - \alpha)\%$ 信頼区間は、 $\left[\frac{\sum_{j=1}^{N \cdot T} (X_{j,1/N} - \bar{X}_{1/N})^2}{\chi_{N \cdot T - 1, \alpha/2}^2}, \frac{\sum_{j=1}^{N \cdot T} (X_{j,1/N} - \bar{X}_{1/N})^2}{\chi_{N \cdot T - 1, 1 - \alpha/2}^2}\right]$ となる。

年率換算した分散 $N \cdot \sigma_{1/N}^2$ の信頼区間は、式(34)の左辺において、式(28)を適用して、不等式に N を掛けると式(35)となる。

$$P\left(\frac{(N \cdot T - 1)}{\chi_{N \cdot T - 1, \alpha/2}^2} N \cdot U_{1/N}^2 \leq N \cdot \sigma_{1/N}^2 \leq \frac{(N \cdot T - 1)}{\chi_{N \cdot T - 1, 1 - \alpha/2}^2} N \cdot U_{1/N}^2\right) = 1 - \alpha \quad (35)$$

$N \cdot U_{1/N}^2$ において、 $1 \cdot U_1^2 = 2 \cdot U_{1/2}^2 = 4 \cdot U_{1/4}^2 = 12 \cdot U_{1/12}^2 = 52 \cdot U_{1/52}^2 = 252 \cdot U_{1/252}^2$ であることに注意すると、サンプリング頻度の違いが年率換算した分散の信頼区間に本質的な影響を与えるのは、係数 $\frac{(N \cdot T - 1)}{\chi_{N \cdot T - 1, \alpha/2}^2}$ や

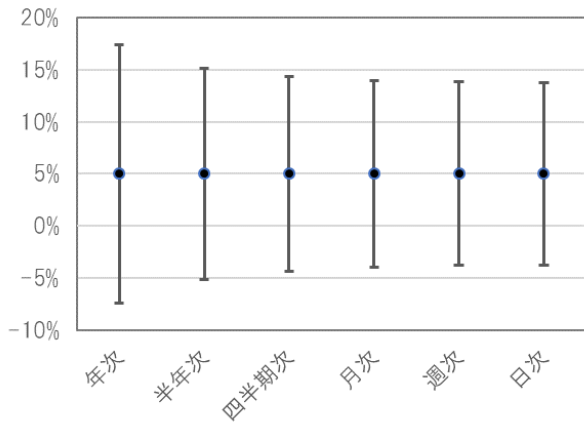
$\frac{(N \cdot T - 1)}{\chi_{N \cdot T - 1, 1 - \alpha/2}^2}$ の値である。

真の年次リターンの期待値 $N \cdot \mu_{1/N}$ と標準偏差 $\sqrt{N} \cdot \sigma_{1/N}$ を、それぞれ、5%、10%に、 α を 0.05 に設定した数値例を示す。リターンデータの年数として、5年間と25年間を対象にした、期待値の信頼区間をそれぞれ、図1に、標準偏差の信頼区間をそれぞれ、図2に示した。ここでは、真のリターンの期待値と分散と等しい推定値が得られた ($\mu_{1/N} = \bar{X}_{1/N}, \sigma_{1/N}^2 = U_{1/N}^2$) 場合における信頼区間を示している。

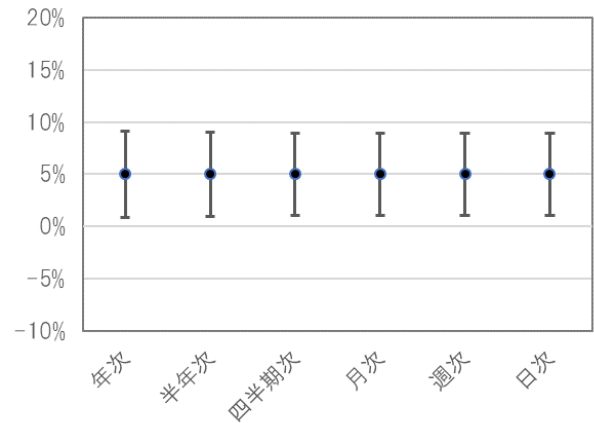
期待値の信頼区間に着目すると、リターンデータの年数 T を5年(図1a)から25年(図1b)へと長くとると信頼区間は大きく縮小するが、サンプリング頻度 N を増やしても信頼区間へ与える影響は小さい、特に、リターンデータの年数が25年の場合には、この影響は殆ど確認できない。

標準偏差の信頼区間に着目すると、リターンデータの年数 T を5年(図2a)から25年(図2b)へと長くとると、期待値の場合と同様に、信頼区間は大きく縮小する。サンプリング頻度 N を増やすと、リターンデータの年数にかかわらず、信頼区間は縮小する。特に、リターンデータの年数が5年の場合に、この影響は大きい。

数値例から投資機会が変動しない場合のインプリケーションとして、次の2点が挙げられる。まず、標準偏差の信頼区間は、サンプリング頻度を高くするに従って急速に縮小するため、下方確率をシャープに把握するには、現実的なリバランス頻度を踏まえたうえで、データサンプリング頻度を高めるのが効果的である。次に、期待値の信頼区間は、リターンデータの年数を長く取らないと信頼区間は本質的に縮小しない。しかし、リターンデータの年数を長く取ろうとすると、将来の経済前提とは異なるような期間を含むことが懸念される。期待リターンとしては、適切な手法を用いて推定したフォワードルッキングな推定値を用いるなど、単純に過去のリターンデータから推定するのとは別のアプローチを利用することが望ましいだろう。

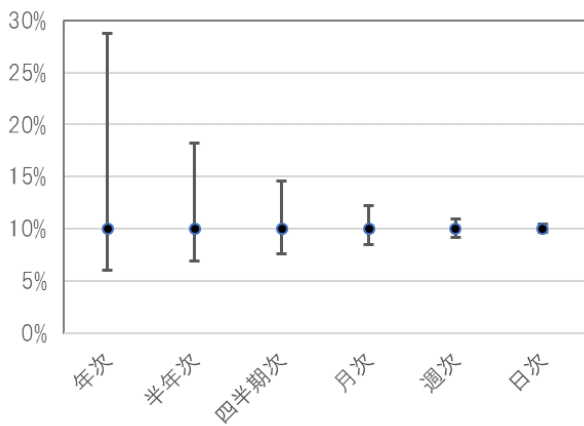


(a) リターンデータの年数 T=5

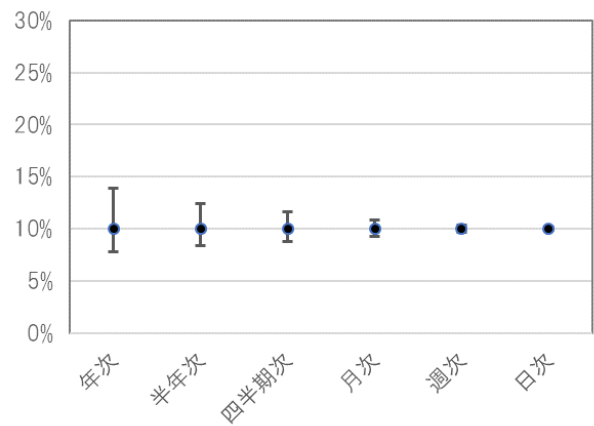


(b) リターンデータの年数 T=25

図1 年率換算した期待値の95%信頼区間



(a) リターンデータの年数 T=5



(b) リターンデータの年数 T=25

図2 年率換算した標準偏差の95%信頼区間

5. まとめと今後の課題

本論文では、連続モデルと離散モデルの双方に関して、投資機会が変動しない場合に、平均や分散といった1期間最適化モデルのパラメータと下方確率との対応関係を正規分布から明示的に把握するには、『データのサンプリング頻度と運用で想定されるリバランスの頻度が共に十分高い』条件が満たされればよいことを示した。更に、インプリケーションとして、効率的フロンティアや下方確率をシャープに把握するという観点では、なるべく多くのサンプルがとれるサンプリング頻度でリターンデータを収集するのがよいと分かった。

今後の課題としては、主に、次の4つが挙げられる。

- (1) 下方確率を求める際の目標額を定数値 K としたが、応用上この目標額も確率変数となることが考えられ、モデルを拡張することが望まれる。
- (2) フォワードルッキングな期待リターンや分散共分散行列に関する適切な推定手法やマーケットデータなどを模索する。
- (3) 実証分析を踏まえて、必要に応じて、投資機会が変動する場合に拡張する。
- (4) GPIFの基本ポートフォリオは、5年毎に財政検証を踏まえて見直される。長期の運用において、1期間モデルを用いることの妥当性は十分に検討しておく必要がある。その際には、枇々木(2004)にある多期間ポートフォリオ最適化モデルの枠組みが有用と思われる。

参考文献

- [1] 清水康弘、内山朋規(2017)「リバランスプレミアムは存在するか」『ワーキングペーパー』
https://researchmap.jp/tomonori.uchiyama/misc/43929355/attachment_file.pdf
- [2] 枇々木規雄(2004)「年金ALMのための多期間ポートフォリオ最適化モデル」『みずほ年金レポート』,5/6月号, pp.36-48. https://lab.ae.keio.ac.jp/~hibiki_lab/profile_2/MPR_n55.pdf
- [3] 本多俊毅(2019)「65年目のポートフォリオ選択理論」『現代ファイナンス』40, pp. 1-24.
- [4] 年金積立金管理運用独立行政法人(GPIF)(2023)『業務概況書』
- [5] 野田一雄・宮岡悦良(1990)『入門・演習 数理統計』共立出版.
- [6] 宮崎浩一(2005)「Box-Cox変換とオプション評価」『応用統計学』34(2), pp. 75-97.
- [7] 森村英典・木島正明(1991)『ファイナンスのための確率過程』日科技連.
- [8] Kan, R. and Zhou, G. (2007) Optimal Portfolio Choice with Parameter Uncertainty. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*,42(3), 621-656.
- [9] Levy, M. and Roll, R. (2010) The market portfolio may be mean/variance efficient after all. *Review of Financial Studies*,23(6), 2464-2491.
- [10] Markowitz, H. (1952) Portfolio Selection. *The Journal of Finance*,7(1), 77-91.