

2023年10月18日

宮崎 浩一

竹内 光

渡辺 桂士

EXECUTIVE SUMMARY

- 年金積立金管理運用独立行政法人（以下 GPIF と呼ぶ）では、基本ポートフォリオ策定における長期の期待リターン推計の一つの材料として均衡収益率を用いている。均衡収益率は、期待短期金利、市場の時価総額、投資家のリスク回避度、資産間の分散共分散によって求められる。その際、将来の実現リターンを表すような均衡収益率の算出に必要なとなるリスク回避度をどう設定するかという課題がある。モデルを使用し、均衡収益率ののちの実現リターンに近くなるようなリスク回避度を逆算したところ、 $-3\sim 5$ の値をとり、平均約 1.5 となることが分かった。ただし、アウトサンプルデータを使用するため、過去時点においてしかこのような逆算はできない。
- 次に、将来の期待リターンを与えるリスク回避度を現時点において算出（フォワード・ルッキングなリスク回避度と呼ぶ）するために、現時点において将来の実現リターンを代替すると考えられる指標を模索した。金利指標は株価等の指標よりも将来リターンに関する情報が織り込まれていると考えられることから、国内債券（NomuraBPI）の将来リターンについては、現時点の金利指標で説明できると考えられる。分析の結果、各時点における将来 10 年間の国内債券の期待リターンは、その時点の 15 年 JGB 利回りによって代替できることが分かった。
- 最後に、このようにして求められる国内債券のフォワード・ルッキングなリスク回避度を、インサンプル期間における国内債券と伝統的 4 資産のリスク回避度の線形関係を用いることにより、伝統的 4 資産のフォワード・ルッキングなリスク回避度に拡張した。その結果、現時点における伝統的 4 資産のフォワード・ルッキングなリスク回避度は約 1.5 となることが分かった。

（注）本ワーキングペーパーは、GPIF 職員の研究成果をとりまとめたものであり、文章中で示された内容や意見は GPIF の公式見解を示すものではありません。



1. はじめに

ポートフォリオの最適化において利用する均衡収益率や期待リターンは、ビルディングブロック法を用いて表現可能である。ビルディングブロック法とは、GPIF(2023)の P38 によると、各資産の期待リターンを、短期金利の期待リターン（以下、期待短期金利と呼ぶ）とリスクプレミアム（リスクの対価とみなされる部分）に分解し、それぞれを推計したうえで合算することによって推計するものである。ここで、期待短期金利は、日本国債（以下、JGB と略す）のイールドカーブに基づいて推計される。また、リスクプレミアムは、CAPM に依拠する Black-Litterman モデル（以下、BL モデルと呼ぶ）（Black and Litterman(1992), Satchell and Scowcroft(2000)など）を採用する場合、各資産に関する時価総額、各資産のリターンから推定される分散共分散行列、リスク回避度の 3 つの要素から決定される。各資産に関する時価総額の代わりに、中川(2019)にあるような最小分散ポートフォリオ等のリスクベース・ポートフォリオのウェイトを採用することも考えられる。

BL モデルを採用してポートフォリオを構築する場合、通常、均衡収益率の算出には、過去の長期間にわたる市場リターンの平均値から期待短期金利を引いて求めた市場リスクプレミアムを市場ポートフォリオの分散で除して得られるリスク回避度（過去データから容易に得られる）を用いることになる。BL モデルのメリットは、Satchell and Scowcroft(2000)の p.140 によると、過去の長期間にわたる均衡リターンの情報に関する条件の下で、事前分布となる投資家の見通しをベイズの定理によって組み込むことが可能となり、合成した期待リターン（事後の期待リターン）の分布が条件付き確率分布として得られ、この分布を用いると、最適化の結果が極端にならないことである。

リスク回避度の推定に関する先行研究を振り返ると、リスク回避度の値は、Ang(2014)：1～10、Paravisini, Pappoport and Ravina(2016)：中央値として 1.6、Holt and Laury(2002)：Paravisini らの設定に換算すると 1.2、Choi, Fisman, Gale and Kariv(2007)：Paravisini らの設定に換算すると 1.8、であり、推定方法やデータ期間、資産の種類などによって様々な値をとるが、先行研究からは、リスク回避度は 1～2 程度と考えられる。

学術論文において、このような過去の期待リターンに内在するリスク回避度の目安は示されているが、期待リターンの将来に対する見通しが無い場合には、先に述べた条件付き確率は得られず、BL モデルを用いた場合の最適ポートフォリオは市場ポートフォリオとなる。本稿では、投資家の見通しが無い場合に、GPIF が運用対象とする伝統的 4 資産から成る市場ポートフォリオの保有を想定して得られる各資産の期待リターンが、対応する将来の実現リターンに最も近くなるようなリスク回避度（将来の期待リターンを与えるリスク回避度）の推定を試みる。GPIF が運用対象とする伝統的 4 資産の均衡収益率や期待リターンに内在するリスク回避度を、実際のデータに基づいて自ら推定のうえ確認しておくことは、有意義と思われる。

実際のデータに基づく将来の期待リターンを与えるリスク回避度の推定において、現時点でポート

フォリオを構築することを想定して、通常のように、リスクに関してはその時点までの過去の分散共分散行列を用いる。また、将来の長期間にわたる市場ポートフォリオウエイトは、現時点のものに等しいと仮定する。また、現時点から想定する投資期間においてリスク回避度は一定であると仮定する。このような仮定の下で、将来の期待リターンを与えるリスク回避度の推定方法の概略は、次の通りである。『ある時点（現時点と呼ぶ）におけるリスク回避度を推定するために、現時点の JGB イールドカーブのほか、各資産に関する現時点の時価総額とインデックスの指数値、過去 10 年間の月次のリターンと 10 年後のインデックスの指数値を用意する。JGB イールドカーブから、N 年後スタートの 1 年フォワードレートを、 $N=0\sim 9$ として求めたうえで平均を取ることによって、期待短期金利（この場合は、10 年のスポットレートに等しい、文末の[注 1]を参照）を求める。過去 10 年間の月次リターンから分散共分散行列を求める。これに加えて、現時点の時価総額の情報があるから、「期待短期金利＋リスクプレミアム[時価総額、分散共分散行列、リスク回避度]」において残っている変数は、リスク回避度だけである。つまり、伝統的 4 資産の期待リターン（又は均衡収益率）が、未知数であるリスク回避度のみを用いて表現されている。また、現時点と 10 年後のインデックスの指数値から、当該資産の 10 年間の年率リターンを求めることで、当該資産の期待リターン（又は均衡収益率）が得られる。伝統的 4 資産に関して、資産の期待リターン（又は均衡収益率）と「期待短期金利＋リスクプレミアム[時価総額、分散共分散行列、リスク回避度]」との誤差が何らかの最適性の下で最小となるようにリスク回避度を推定する。』

上記の推定手法では、現時点と 10 年後のインデックスの指数値から、伝統的資産の先行き 10 年間の年率リターンを求める必要があるため、現時点から 10 年以上の過去時点までのリスク回避度は推定されるのであるが、その時点以降のリスク回避度、つまり、フォワード・ルッキングなリスク回避度が得られない。これを解決するためには、少なくとも伝統的資産の中で 1 つの資産だけでも、ある程度の確からしさをもって、現時点から将来の長期的なリターンを予測する必要がある。予測可能な 1 つの伝統的資産の長期リターンのみからリスク回避度を求めれば、伝統的 4 資産を使って得られる正式なリスク回避度を推定することができる。本研究では、1 つの資産を国内債券に特定して、『将来の NomuraBPI の長期的なリターンを相応に予測できるのは、現在の JGB イールドカーブにおけるどの年限の JGB 利回りであろうか?』というリサーチ・クエスチョンに取り組むことで、フォワード・ルッキングなリスク回避度の推定に際してある年限の JGB 利回りを利用する。

フォワード・ルッキングなリスク回避度を推定するために、まず、国内債券 (NomuraBPI) のみを用いて推定されるリスク回避度と伝統的 4 資産を用いて推定されるリスク回避度との過去の長期間における関係性を確認する。次に、JGB のある年限の利回りが、将来の NomuraBPI の長期的なリターンを相応に予測できるなら、その JGB 利回りを用いて国内債券 (NomuraBPI) のみを用いたリスク回避度を推定したうえで、先のリスク回避度との関係性を通して、フォワード・ルッキングなリスク回避度を推定する。

本稿の構成は、以下の通りである。節2では、節1で述べたリスク回避度の推定手法を、模式図や数式を用いて再確認したうえで、過去のリスク回避度の推移を確認する。節3では、「将来のNomuraBPIの長期的なリターンを的確に予測できるのは、現在のJGBイールドカーブにおけるどの年限のJGB利回りであろうか？」という問いに対するデータと分析対象、分析手法、分析結果とその考察について述べる。節4では、伝統的4資産を用いて推定されるリスク回避度と国内債券(NomuraBPI)のみを用いて推定されるリスク回避度との過去の長期間における関係性を確認したうえで、ある年限のJGB利回りを利用して、国内債券(NomuraBPI)のみを用いたリスク回避度を推定したうえで、フォワード・ルッキングなリスク回避度を推定する。最終節では、まとめと今後の課題を付す。

2. リスク回避度の推定

2.1 リスク回避度の推定法

短期金利の推定値を r_f 、リスク回避度を γ 、伝統的4資産(国内債券、外国債券、国内株式、外国株式)の均衡収益率、時価総額、分散共分散行列を、それぞれ、 $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)^T$ 、 $\boldsymbol{m} = (m_1, m_2, m_3, m_4)^T$ 、

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \rho_{13}\sigma_1\sigma_3 & \rho_{14}\sigma_1\sigma_4 \\ \rho_{21}\sigma_2\sigma_1 & \sigma_2^2 & \rho_{23}\sigma_2\sigma_3 & \rho_{24}\sigma_2\sigma_4 \\ \rho_{31}\sigma_3\sigma_1 & \rho_{32}\sigma_3\sigma_2 & \sigma_3^2 & \rho_{34}\sigma_3\sigma_4 \\ \rho_{41}\sigma_4\sigma_1 & \rho_{42}\sigma_4\sigma_2 & \rho_{43}\sigma_4\sigma_3 & \sigma_4^2 \end{pmatrix}$$

とすると、均衡収益率は、式(1)で与えられる。

$$\boldsymbol{\mu} = r_f \mathbf{1} + \gamma \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{m} \quad (1)$$

ここで、 $\mathbf{1} = (1, 1, 1, 1)^T$ である。

式(1)を、節1で述べた、リスク回避度の推定法と対応付ける。推定法の概要を図1に示した。

各資産に関して、現時点と10年後のインデックスの指数値から当該資産の先行き10年間の年率リターンを求めたもの(図1の③)が均衡収益率 $\boldsymbol{\mu}$ 、現時点のJGBイールドカーブから10年債までのデータを用いて、N(N=0~9)年後スタートの1年フォワードレートの平均によって期待短期金利を求めたもの(図1の①)が r_f 、過去10年間の月次リターンから分散共分散行列を求めたもの(図1の②)が $\boldsymbol{\Sigma}$ 、現時点での時価総額を表したもの(図1の④)が \boldsymbol{m} である。式(1)において、リスク回避度 γ 以外は、データとして上記のように与えられるので、式(1)の各資産に関して、左辺と右辺の誤差が、何らかの意味合いで最小となるようにリスク回避度 γ を推定する。式(1)を具体的に書き下すと、式(2)となる。

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \mu_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_f + \gamma(m_1\sigma_1^2 + m_2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 + m_3\rho_{13}\sigma_1\sigma_3 + m_4\rho_{14}\sigma_1\sigma_4) \\ r_f + \gamma(m_2\sigma_2^2 + m_1\rho_{21}\sigma_2\sigma_1 + m_3\rho_{23}\sigma_2\sigma_3 + m_4\rho_{24}\sigma_2\sigma_4) \\ r_f + \gamma(m_3\sigma_3^2 + m_1\rho_{31}\sigma_3\sigma_1 + m_2\rho_{32}\sigma_3\sigma_2 + m_4\rho_{34}\sigma_3\sigma_4) \\ r_f + \gamma(m_4\sigma_4^2 + m_1\rho_{41}\sigma_4\sigma_1 + m_2\rho_{42}\sigma_4\sigma_2 + m_3\rho_{43}\sigma_4\sigma_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_f + \gamma(\sigma_{(1)}^2) \\ r_f + \gamma(\sigma_{(2)}^2) \\ r_f + \gamma(\sigma_{(3)}^2) \\ r_f + \gamma(\sigma_{(4)}^2) \end{pmatrix} \quad (2)$$

ここで、

$$\sigma_{(1)}^2 = (m_1\sigma_1^2 + m_2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 + m_3\rho_{13}\sigma_1\sigma_3 + m_4\rho_{14}\sigma_1\sigma_4) \quad (3)$$

$$\sigma_{(2)}^2 = (m_2\sigma_2^2 + m_1\rho_{21}\sigma_2\sigma_1 + m_3\rho_{23}\sigma_2\sigma_3 + m_4\rho_{24}\sigma_2\sigma_4) \quad (4)$$

$$\sigma_{(3)}^2 = (m_3\sigma_3^2 + m_1\rho_{31}\sigma_3\sigma_1 + m_2\rho_{32}\sigma_3\sigma_2 + m_4\rho_{34}\sigma_3\sigma_4) \quad (5)$$

$$\sigma_{(4)}^2 = (m_4\sigma_4^2 + m_1\rho_{41}\sigma_4\sigma_1 + m_2\rho_{42}\sigma_4\sigma_2 + m_3\rho_{43}\sigma_4\sigma_3) \quad (6)$$

とおいた。

先に、「何らかの意味合いで」と述べたが、最も単純なものとしては、各資産の均衡リターンとその推定値との誤差を小さくする意味合いで、式(2)の両辺の各要素の誤差の2乗和を最小にするようにリスク回避度 γ を推定するものが挙げられる。この場合、目的関数は、 $f(\gamma) = \sum_{i=1}^4 (\mu_i - r_f - \gamma\sigma_{(i)}^2)^2$ となり、この目的関数を最小化することで、推定されるリスク回避度 γ を $\gamma^{(*f)}$ とすると、これは $f(\gamma)$ を γ で微分して0とおくことにより、式(7)のように求められる。

$$\gamma^{(*f)} = \frac{\sum_{i=1}^4 (\mu_i - r_f) \sigma_{(i)}^2}{\sum_{i=1}^4 \sigma_{(i)}^4} \quad (7)$$

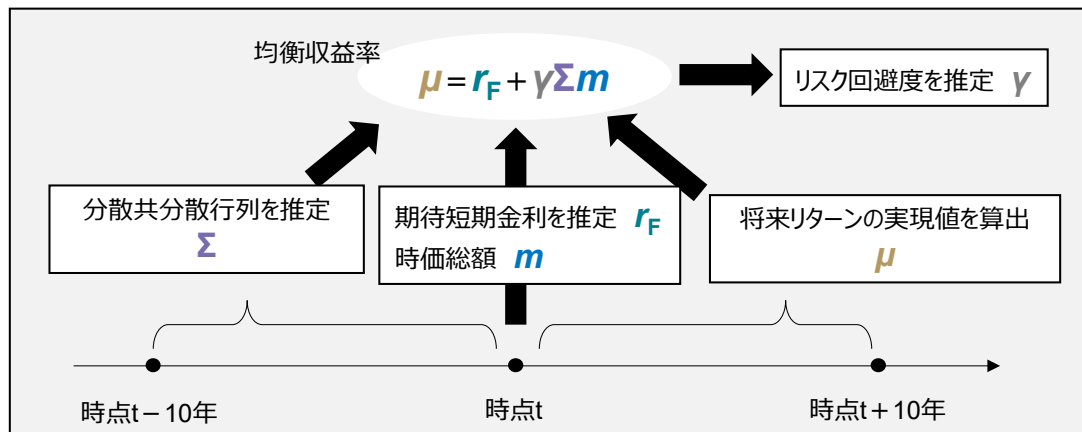
また、各資産の単位リスク当たりの超過収益とリスク回避度 γ との誤差を小さくする意味合いで、式(7)の両辺の各要素の誤差の2乗和を最小にするようにリスク回避度 γ を推定するものも考えられる。

$$\begin{pmatrix} (\mu_1 - r_f) / \sigma_{(1)}^2 \\ (\mu_2 - r_f) / \sigma_{(2)}^2 \\ (\mu_3 - r_f) / \sigma_{(3)}^2 \\ (\mu_4 - r_f) / \sigma_{(4)}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma \\ \gamma \\ \gamma \end{pmatrix} \quad (8)$$

この場合、目的関数は $g(\gamma) = \sum_{i=1}^4 ((\mu_i - r_f) / \sigma_{(i)}^2 - \gamma)^2$ となり、この目的関数を最小化することで、推定されるリスク回避度 γ を $\gamma^{(*g)}$ とすると、これは、 $g(\gamma)$ を γ で微分して0とおくことにより、式(9)のように求められる。

$$\gamma^{(*g)} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 \frac{\mu_i - r_f}{\sigma_{(i)}^2} \quad (9)$$

図1 リスク回避度の推定法



2.2 データと分析設定、リスク回避度の推定結果とその考察

分析に用いたデータは、JGBの利回りデータ（1986年12月末～2023年7月末までの月次データ）、伝統的4資産のインデックスデータ（具体的には文末の[注2]を参照。1984年12月末から2023年6月末までの月次）、伝統的4資産の市場時価総額データ（1997年12月末から2023年6月末までの月次）である。

分析設定としては、 $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)^T$ を均衡収益率と捉えて、 $\boldsymbol{m} = (m_1, m_2, m_3, m_4)^T$ として時価総額ウェイトを採用するもの（この場合がCAPMを想定したBlack and Litterman(1992), Satchell and Scowcroft(2000)などである）の他に、 $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)^T$ を期待リターンと捉えたうえで、 $\boldsymbol{m} = (m_1, m_2, m_3, m_4)^T$ として均等ウェイトと最小分散ポートフォリオウェイト（Clarke et al. (2006), 山田・上崎(2009)など）をそれぞれ採用するもの、合計3通りの $\boldsymbol{m} = (m_1, m_2, m_3, m_4)^T$ についてリスク回避度の推定を行う。また、リスク回避度の推定に関しては、式(7)で与えられる推定法と式(9)で与えられる推定法の2通りについて行う。

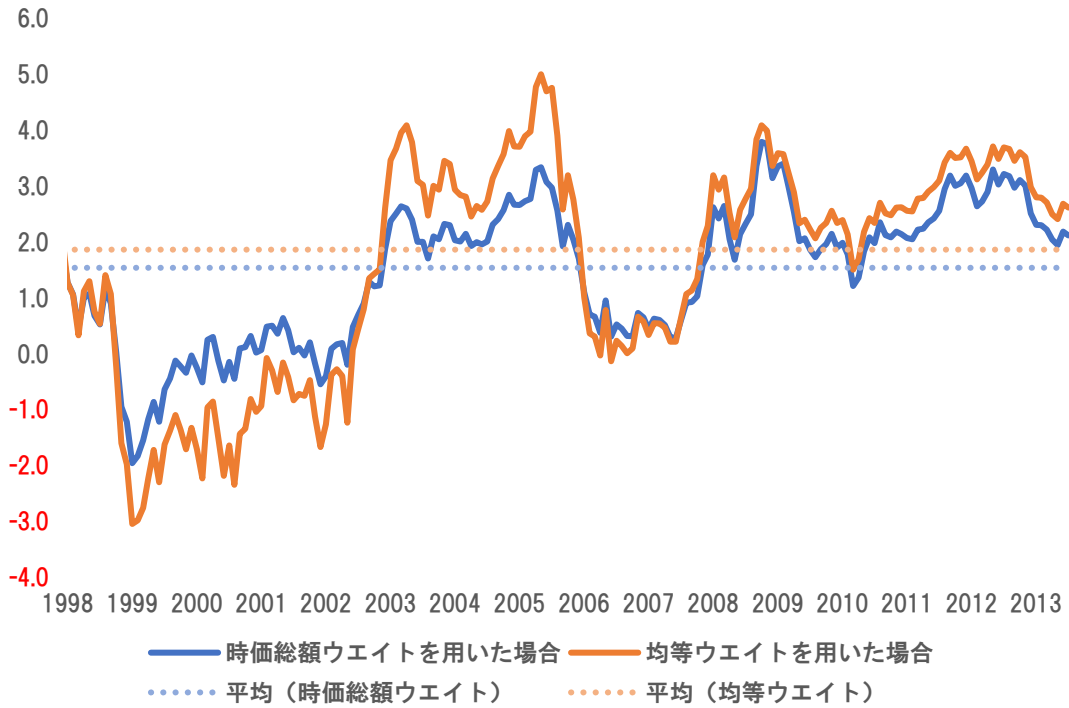
リスク回避度の推定を、式(9)に基づいて行った場合には、幾つかの時点で、リスク回避度が発散する結果となった。これは、幾つかの時点で、国内債券と外国債券に関する $\sigma_{(1)}^2$ と $\sigma_{(2)}^2$ が、式(3)と式(4)の構成要素に含まれる相関係数が負の値をとることから、極めて小さくなることによる。式(7)に関しては、分子に $\sigma_{(i)}^2$ が乗じられており、分母が $\sum_{i=1}^4 \sigma_{(i)}^4$ なので、オーダーとしては式(9)と同じであるが、分母の $\sum_{i=1}^4 \sigma_{(i)}^4$ は全ての資産にわたって $\sigma_{(i)}^4$ の和を取っていることから、たとえ1～2個の資産に関する $\sigma_{(i)}^4$ が0に極端に近くても、 $\sum_{i=1}^4 \sigma_{(i)}^4$ がリスク回避度の推定値を発散させるには至らず、安定してリスク回避度の推定ができる。そこで、以下では、式(7)に基づいて推定されたリスク回避度に焦点を当てて分析結果を考察する。

$\boldsymbol{m} = (m_1, m_2, m_3, m_4)^T$ として、時価総額ウェイト及び均等ウェイトを想定してリスク回避度を求めたものを図2に、最小分散ポートフォリオウェイト（非負条件付きも含む）を採用してリスク回避度

を求めたものを図 3 に示した。図 2、図 3 共に、リスク回避度に関して、1997 年 12 月末から 2013 年 7 月末までの月次の推移が示されている。2013 年 7 月末までとなっている理由は、先にも述べたように、現時点と 10 年後のインデックスの指数値から、伝統的資産の先行き 10 年間の年率リターンを求める必要があるため、10 年後のインデックスの指数値として利用可能なデータが 2023 年 7 月末までであることによる。

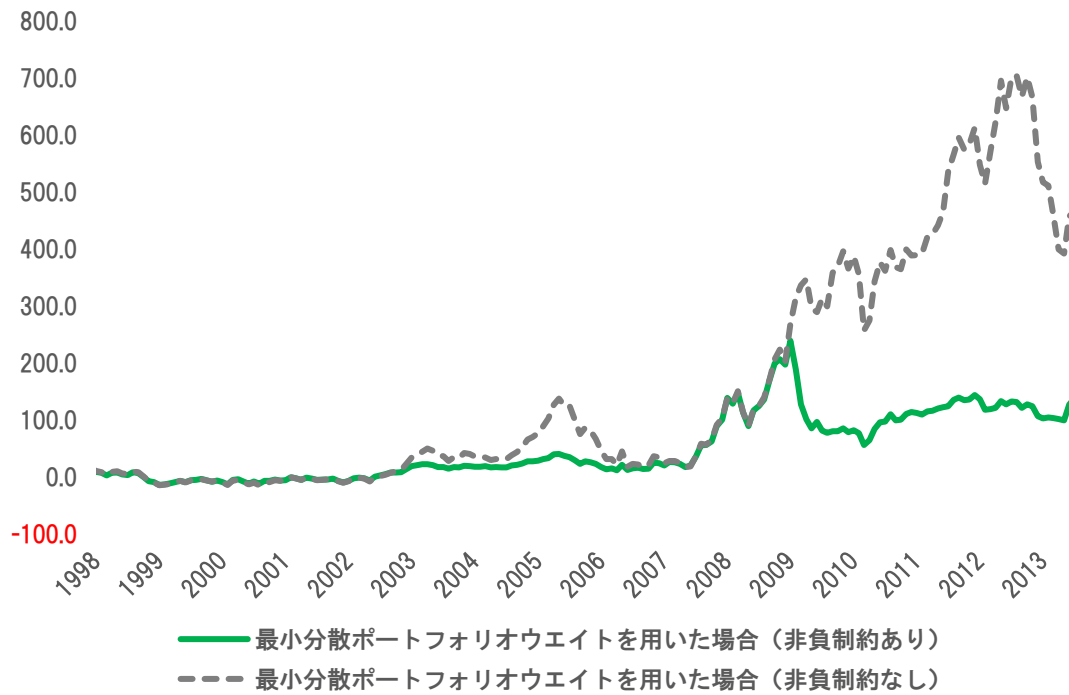
図 2 を見ると、時価総額ウェイトを用いて推定したリスク回避度は、均等ウェイトを想定して推定したものと概ね同じ推移をしているが、時価総額ウェイトを用いて推定したリスク回避度の方が、振れ幅は小さく安定して推定していることがわかり、CAPM は相応に効力を有していることが伺える。また、1999 年から 2002 年頃のリスク回避係数は、どちらも負の値となっているが、これは、リターンを計測する 10 年後が GFC (Great Financial Crisis) の直後の時期に該当するため、リスクプレミアムが大きな負の値となっていることによる。時価総額ウェイトを用いて推定したリスク回避度は、正の時期に限定すると 0~4 の値を推移し、全期間における平均値 (負の値の場合には 0 に置き換える) は、1.5 であり、先行研究の値と概ね整合的なものとなった。一方、図 3 を見ると、最小分散ポートフォリオウェイトを採用してリスク回避度を求めた場合には、ウェイトに非負条件を課した場合であっても、リスク回避度は、0~200 の間を推移し、推定が適切に成されたとは言い難い。この理由は、最小分散ポートフォリオウェイトでは、ウェイトの大部分が国内債券で占められる時期があり、そのような時期においては、式(9)の場合と同様の不具合が生じるからである。よって、節 4 の将来の期待リターンを与えるリスク回避度の推定においては、時価総額ウェイトを用いて推定したリスク回避度を対象とする。

図2 時価総額ウェイト及び均等ウェイトを想定したリスク回避度



（出所：FactSet、財務省のデータより筆者ら作成）

図3 最小分散ポートフォリオウェイト（非負条件付きも含む）を採用したリスク回避度



（出所：FactSet、財務省のデータより筆者ら作成）

3. 将来の長期的な国内債券リターン (NomuraBPI リターン) の代用となる JGB 利回り

3.1 データと分析対象

分析に用いるデータは、1986/12/1～2023/6/19 における、NomuraBPI の指数値（文末の[注 2]を参照）、満期 5 年、満期 10 年、満期 20 年の JGB 利回り、1991/8/30～2023/6/19 における満期 15 年の JGB 利回り、1999/9/2～2023/6/19 における満期 30 年の JGB 利回りである。満期 15 年の JGB 利回りが取得できない期間は、満期 10 年と満期 20 年の JGB 利回りの平均を用いる。満期 30 年の JGB 利回りが取得できない期間は、満期 25 年の JGB 利回りを、満期 10 年と 20 年の JGB 利回りを用いて外挿したものを用い、満期 30 年の JGB 利回りが取得できるようになって以降は、満期 20 年と満期 30 年の JGB 利回りの平均を用いる。NomuraBPI の指数値は Factset から、各種 JGB 利回りは、財務省の WebSite から取得した。

比較対象は、将来 25 年間、将来 20 年間、将来 15 年間、将来 10 年間、将来 5 年間の各々の期間における NomuraBPI リターン（年率表示）とする。比較に用いる JGB 利回りは、将来 25 年間の NomuraBPI リターンに対しては、比較時点の満期 25 年 JGB 利回り、将来 20 年間の NomuraBPI リターンに対しては、比較時点の満期 25 年と満期 20 年の JGB 利回り、将来 15 年間の NomuraBPI リターンに対しては、比較時点の満期 25 年、満期 20 年と満期 15 年の JGB 利回り、将来 10 年間の NomuraBPI リターンに対しては、比較時点の満期 25 年、満期 20 年、満期 15 年と満期 10 年の JGB 利回り、将来 5 年間の NomuraBPI リターンに対しては、比較時点の満期 25 年、満期 20 年、満期 15 年、満期 10 年と満期 5 年の JGB 利回りとする（文末の[注 3]を参照）。

分析手法は、例えば、「ある時点（比較時点）における満期 25 年の JGB 利回りは、その時点から先行き 25 年間の NomuraBPI リターンと、どの時点においても（ローリングで比較を続けた場合に）概ね同じである」という仮説を立てて、これを検定するものである。よって、仮説の対象となる NomuraBPI リターンと JGB 利回りとの組は、表 1 に示すように、例を含めて 15 通りである。将来の NomuraBPI リターンの計測期間によって、検証の対象となる期間が異なるため、表 1 に明示した。

表 1 仮説検定の対象となる組と検証の対象となる期間

検証の対象となる期間	仮説検定の対象となる組（将来N年間のBPIリターン, 現時点のM年JGB利回り）
1986/12/1～1998/6/19	(1) (25Y BPI Return, 25Y JGB Yield)
1986/12/1～2003/6/19	(2) (20Y BPI Return, 25Y JGB Yield), (3) (20Y BPI Return, 20Y JGB Yield)
1986/12/1～2008/6/19	(4) (15Y BPI Return, 25Y JGB Yield), (5) (15Y BPI Return, 20Y JGB Yield), (6) (15Y BPI Return, 15Y JGB Yield)
1986/12/1～2013/6/19	(7) (10Y BPI Return, 25Y JGB Yield), (8) (10Y BPI Return, 20Y JGB Yield), (9) (10Y BPI Return, 15Y JGB Yield), (10) (10Y BPI Return, 10Y JGB Yield)
1986/12/1～2018/6/19	(11) (5Y BPI Return, 25Y JGB Yield), (12) (5Y BPI Return, 20Y JGB Yield), (13) (5Y BPI Return, 15Y JGB Yield), (14) (5Y BPI Return, 10Y JGB Yield), (15) (5Y BPI Return, 5Y JGB Yield)

3.2 分析手法

まずは、分析対象となる 15 通りの組に対して、ある時点における JGB 利回り、その時点から分析対象として設定したリターン計測期間の NomuraBPI リターンとを並べて、日々ローリングで時系列的に比較できるようにグラフ化し、両者の一致度の高いものを視覚的に選択する。

次に、仮説検定の手法について述べる。節 3.1 と同じ例（組(1)）を用いて説明する。ある時点 t （比較時点）における満期 25 年の JGB 利回り (x_t) と、その時点から先行き 25 年間の NomuraBPI リターン (y_t) との 2 つの標本の対 (x_t, y_t) ($t = 1, \dots, n$) として標本が与えられる。よって、差 $d_t = x_t - y_t$ を新たに標本と考えれば、 x_t と y_t との平均の差に関する検定の問題は、1 標本 $\{d_t, t = 1, \dots, n\}$ の母平均に関する検定の問題に帰着される。すなわち、 x_t, y_t の母平均を、それぞれ、 μ_1, μ_2 とするとき、帰無仮説 $H_0: \mu_1 = \mu_2$ の下で、 d は、平均 $\mu_d = 0$ 、分散 σ_d^2 の正規分布に従うので、母集団が 1 つの場合の t 検定を適用すればよい。

$$\bar{d} = \frac{\sum_{t=1}^n d_t}{n}, \hat{\sigma}_d^2 = \frac{\sum_{t=1}^n (d_t - \bar{d})^2}{n-1}$$
を用いて、 $t = \frac{\bar{d}}{\hat{\sigma}_d / \sqrt{n}}$ を作ると、これは、帰無仮説 $H_0: \mu_d = 0$ の下で、

自由度 $n - 1$ の t 分布に従う。

但し、上記の仮説検定が正しく実行されるには、標本 $\{d_t, t = 1, \dots, n\}$ が独立していなければならない。このため、日々ローリングして得られる全てのデータを仮説検定に使用することは出来ない。その理由は、例えば、ある時点から先行き 25 年間の NomuraBPI リターンとその翌日から先行き 25 年間の NomuraBPI リターンとは、ほとんど同じであり、全ての標本を使用すると、標本の自己相関が極端に大きくなり正しい t 検定が行えないからである。標本の自己相関が概ね無くなる程度に時間間隔を空けて、標本を収集する必要がある。四半期、半年、1 年毎に標本を収集したところ、四半期や半年の時間間隔を空けた程度では、収集された標本に自己相関が相応に残り、これらの標本が独立であると認めるのは難しい。1 年の時間間隔を空けて標本を収集した場合には、標本の自己相関は概ね無くなり、独立な標本と看做せる。しかし、逆に、1 年毎に標本を収集する場合には、標本数が少なくなるため、それらの標本から得られる平均と分散が、検証対象となる期間における適切な平均と分散を表しているか懸念される。よって、四半期、半年、1 年毎に収集した標本の何れに対しても t 検定を行い、仮説検定の過程で求める平均と分散が、標本数の異なる 3 通りの標本間で概ね等しくなることを確認したうえで、仮説検定の結果としては、1 年毎に収集した標本に依拠するものを採用する。

3.3 分析結果とその考察

組(1)～組(15)について、JGB 利回り、NomuraBPI リターンの時系列推移に関するグラフを作成して確認することによって、次のことが分かった。

第一に、NomuraBPI リターンの時系列的推移に着目した場合、リターンを計測する期間が、25 年、20 年、15 年、10 年、5 年、と短くなるに従って、NomuraBPI リターンの時系列的な変動性が高まっていくことが分かった。この背景として、リターン計測期間が 25 年、20 年、15 年と比較的長期間であ

れば、JGB 市場が上昇相場と下落相場の双方を幾つか含むため、NomuraBPI リターンは比較的安定的に推移するが、リターン計測期間が 10 年、5 年では、NomuraBPI リターンがその時々相場状況を反映して大きく変動することが考えられる。

第二に、NomuraBPI リターンと JGB 利回りを比較する。リターン計測期間が 25 年、20 年の場合、先に見たようにリターンの変動性が小さいこと、分析対象期間が 2000 年代初頭までであり、NomuraBPI に占める 10 年以下の JGB の時価総額が大きいこと、リターンに占める利回り水準の影響が大きく、満期 25 年や満期 20 年の JGB 利回りよりも NomuraBPI リターンは小さい。リターン計測期間が 15 年の場合、満期 25 年の JGB 利回りでは、やはり概ね NomuraBPI リターンよりも大きいが、満期 15 年の JGB 利回りとの比較では、1980 年代後半の一部や 1998 年から 2005 年にかけては、両者が一致する時期がしばしばみられる。リターン計測期間が 10 年の場合、何れの満期の JGB 利回りも NomuraBPI リターンと一致する時期がしばしばみられる。特に、満期 15 年の JGB 利回りは、一部の時期では相応に乖離が見られるものの、検証対象となる期間にわたって押しなべて見ると、かなり両者が一致していることが確認された。リターン計測期間が 5 年の場合、検証の対象となる期間の前半と後半で様子が異なる。NomuraBPI リターンが極めて大きかった前半では、何れの満期の JGB 利回りも概ね NomuraBPI リターンよりも小さい。後半の時期は低金利下での利回り低下局面が多く、NomuraBPI リターンは、満期が長い 25 年、20 年の JGB 利回りと一致する時期がしばしば見られたが、低金利の下で満期が 15 年以下の JGB 利回りは低く、NomuraBPI リターンを概ね下回る結果となった。

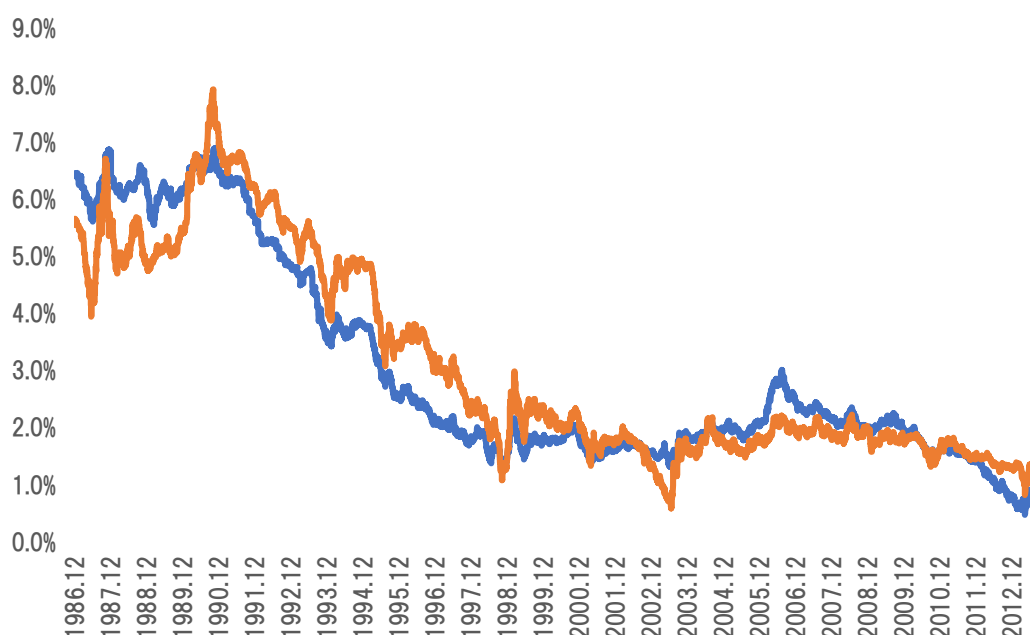
これらの分析結果を踏まえると、組(9)(10Y BPI Return, 15Y JGB Yield)が、最も BPI リターンと JGB 利回りの一致性が高いことがわかった。よって、15 組の中から、組(9)を抽出して、両者の時系列推移を図 4 に示した。

視覚的に、長期的な国内債券リターン (NomuraBPI リターン) として、計測期間 10 年間の NomuraBPI リターンをその代用となる JGB 利回りとして 15Y JGB Yield、を選択したが、ここで、統計的に両者が乖離していないことを確認する。表 2 には、組(1)から組(15)に関する検定結果が、左から順に示されている。Average(BP)には、JGB 利回りから NomuraBPI リターンを差し引いた値の標本平均値を BP で表示した。プラスの値は、JGB 利回りが NomuraBPI リターンよりも大きいバイアスを持ち、マイナスの値は、その逆である。Std(BP)には、JGB 利回りから NomuraBPI リターンを差し引いた値の標本標準偏差を BP で表示した。# of Data は、検定に用いた標本数を表し、t-Value は、t 統計検定量を示す。まず、四半期、半年、1 年毎に収集した標本の標本平均、標本標準偏差を比較すると、いずれも、概ね同程度の水準であり、標本数の少ない 1 年毎の標本が偏ったものではないことが確認される。よって、主に、自己相関の無い 1 年毎に収集した標本を用いた検定結果を主として、四半期、半年、毎に収集した標本を用いた検定結果を参考程度にして考察する。

自由度にもよるが、t-Value が 2 を超えると、5%の有意水準で帰無仮説は棄却され、JGB 利回りから NomuraBPI リターンを差し引いた値の平均値が 0 とは異なり、JGB 利回りは NomuraBPI リターンの良

い予測とはいえない。表2の1年毎に収集した標本を用いた検定結果を見ると、多くの組に関してt-Valueが2を超え、帰無仮説は棄却される。棄却されない組は、(9)(10Y BPI Return, 15Y JGB Yield)、(11)(5Y BPI Return, 25Y JGB Yield)、(12)(5Y BPI Return, 20Y JGB Yield)の3組である。これらの中でも、組(9)は、何れの標本に関してもAverage(BP)や標本標準偏差が最も小さい。よって、リターン計測期間として10年を採用したNomuraBPIリターンの代用として、15年JGB利回りをを用いることの妥当性が確認された。

図4 組(9)(10Y BPI Return, 15Y JGB Yield)の時系列推移



(出所：FactSet、財務省のデータより筆者ら作成)

表2 NomuraBPIリターンとJGB利回りとの15通りの組に関する一致性の検定結果

	BPI-Yield	25-25	20-25	20-20	15-25	15-20	15-15	10-25	10-20	10-15	10-10	5-25	5-20	5-15	5-10	5-5
Annual	t-Value	12.46	7.50	6.58	6.23	5.13	3.61	3.61	2.44	0.62	-2.80	-0.53	-1.43	-3.18	-5.90	-10.17
	Std (BP)	62	83	85	73	75	81	60	59	60	55	88	85	79	77	76
	Average(BP)	222	151	135	97	82	62	42	28	7	-30	-8	-21	-44	-81	-136
	# of Data	12	17	17	22	22	22	27	27	27	27	32	32	32	32	32
Semi-annual	t-Value	16.63	10.11	8.75	8.13	6.64	4.70	4.65	3.17	0.79	-3.72	-0.96	-2.15	-4.49	-8.13	-14.06
	Std (BP)	63	83	86	76	79	86	62	61	63	57	91	87	80	79	76
	Average(BP)	212	144	130	93	79	61	39	26	7	-29	-11	-23	-45	-80	-134
	# of Data	24	34	34	44	44	44	54	54	54	54	64	64	64	64	64
Quarterly	t-Value	23.88	14.57	12.75	11.61	9.70	7.04	6.83	4.87	1.53	-4.77	-1.45	-3.22	-6.75	-12.10	-21.29
	Std (BP)	62	83	86	76	79	85	62	60	61	56	83	80	74	73	70
	Average(BP)	216	147	134	95	82	65	41	28	9	-26	-11	-23	-44	-79	-133
	# of Data	47	67	67	87	87	87	107	107	107	107	127	127	127	127	127



4. 将来の期待リターンを与えるリスク回避度

4.1 将来の期待リターンを与えるリスク回避度の推定手順

Step1 :

現時点から先行き 10 年間の NomuraBPI リターンを被説明変数として、スプライン関数を用いて推定した現時点の 15 年 JGB スポットレートを説明変数とする回帰分析によって両者の関係を特定する。節 3 の分析結果から、15 年 JGB スポットレートは先行き 10 年間の NomuraBPI リターンに対して説明力を有するものと考えられる。

Step2 :

式(2)の両辺の第一成分のみに着目して、リスク回避度を $\gamma^{BPI} = \frac{\mu_1 - r_f}{\sigma_1^2}$ (分母は、式(3)の左辺にある分散 $\sigma_{(1)}^2$ ではなく、右辺にある NomuraBPI リターン自体の分散 σ_1^2 であることに注意、また、分子に関しては、文末の[注 4]を参照)によって推定する。つまり、NomuraBPI リターンのみの情報からリスク回避度 γ^{BPI} を推定する。節 2 で推定したリスク回避度を被説明変数とし、NomuraBPI リターンのみの情報から得られたリスク回避度 γ^{BPI} (以下、リスク回避度 γ^{BPI} と呼ぶ) を説明変数とする回帰分析から両者の関係性を特定する。回帰分析に用いるデータは、1997 年 12 月末から 2013 年 7 月末までの月次の γ と γ^{BPI} である。

Step3 :

2013 年 8 月末以降 2023 年 7 月末までの月次の 15 年 JGB スポットレートから Step1 において得られた関係を用いて、対応する NomuraBPI リターンを導出する。これらの情報から、同期間におけるリスク回避度 γ^{BPI} を推定する。Step2 において得られた関係を用いて同期間における γ すなわち、将来の期待リターンを与えるリスク回避度を推定する。

4.2 将来の期待リターンを与えるリスク回避度の推定結果とその考察

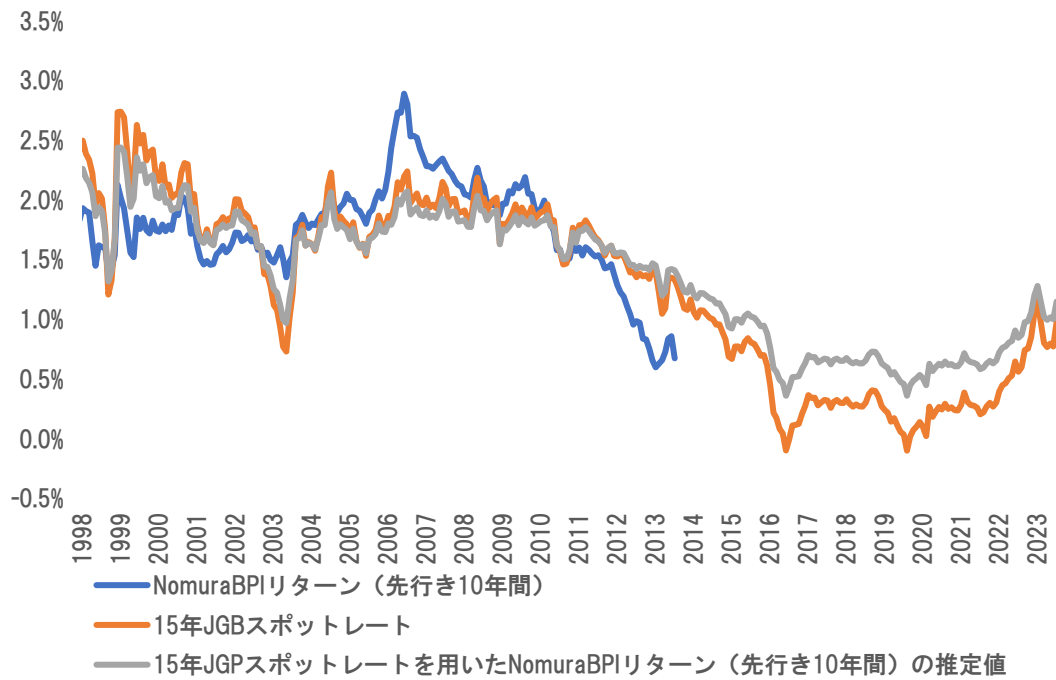
分析結果を Step1 から順に確認する。表 3 には、1997 年 12 月末から 2013 年 7 月末までの月次でサンプルされる NomuraBPI リターン (先行き 10 年間) を被説明変数として、スプライン関数を用いて推定した 15 年 JGB スポットレートを説明変数とする回帰分析の結果を示した。表 3 を見ると、15 年 JGB スポットレートの係数の t 値は 10 を超えており、15 年 JGB スポットレートと NomuraBPI リターンとの高い関係性が伺える。また、回帰分析における相関は 0.6 程度あるため、15 年 JGB スポットレートを用いた回帰式 (NomuraBPI リターン $\approx 0.004338 + 0.732444 \times 15$ 年 JGB スポットレート) が NomuraBPI リターンの変動をある程度まで説明できることがわかる。実際、図 5 に示した 15 年 JGB スポットレートやそれに基づく NomuraBPI リターンの推定値は、NomuraBPI リターンと同様の推移 (1997

年 12 月末から 2013 年 7 月末まで) をしていることがわかる。2013 年 8 月末以降 2023 年 7 月末までに関して、15 年 JGB スポットレートの推移を振り返ると、日銀が量的・質的金融緩和を導入した 2013 年 4 月以降から 15 年 JGB スポットレートの低下が顕著になり、2016 年にイールドカーブ・コントロールが導入されると 15 年 JGB スポットレートは急速に低下して、一時、マイナス 0.1% 程度となりその後しばらくはマイナス 0.1% からプラスの 0.5% で推移し、2022 年入り後に 0.5% を上回るような利回りの上昇が見られた。この期間において、回帰式から推定される NomuraBPI リターンは、15 年 JGB スポットレートと同じ方向感をもって概ね 0.4% から 1.3% の間で推移していた。

Step2 に関して、リスク回避度 γ^{BPI} の推移を図 6 に示した。図 6 を見ると、リスク回避度は、0 近辺から変動しながら上昇して 2009 年 8 月末には 19.6 まで上昇し、以降は変動しながら低下して一時的に -6.7 まで下がったことが分かる。伝統的 4 資産を用いて推定したリスク回避度 γ を被説明変数とし、リスク回避度 γ^{BPI} を説明変数とする回帰分析の結果を表 4 に示した。表 4 を見ると、リスク回避度 γ^{BPI} の係数の t 値は 6 を超えており、リスク回避度 γ^{BPI} と伝統的 4 資産から推定されるリスク回避度 γ との高い関係性が伺える。また、回帰分析における相関は 0.43 と高くはないが少しは見られるので、リスク回避度 γ^{BPI} を用いた回帰式が伝統的 4 資産から推定されるリスク回避度 γ の変動をある程度は説明できることがわかる。

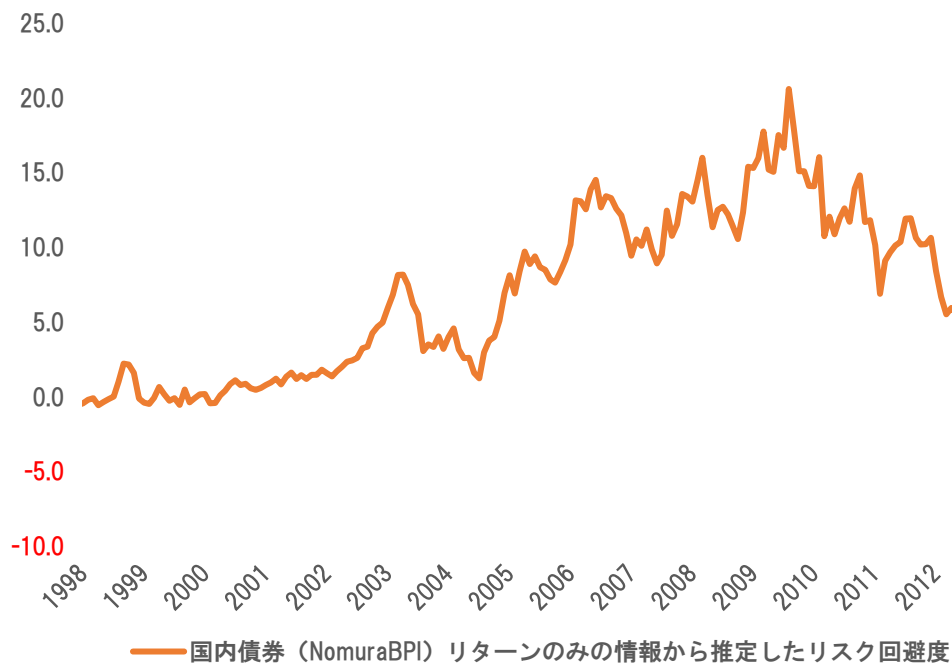
Step3 に関して、15 年 JGB スポットレートから推定したリスク回避度（アウトサンプル期間である 2013 年 8 月末以降は、フォワード・ルッキングなリスク回避度と呼ぶ）と伝統的 4 資産から推定したリスク回避度の推移を図 7 に示した。15 年 JGB スポットレートから推定したリスク回避度は、イールドカーブ・コントロール導入前後の時期となる 2015 年 3 月末から 2016 年 11 月末の期間においては、4 を超えて一時的に 9 にまで達する（理由として、国内債券の超過リターンは概ね一定であったが、この時期にその分散が 0 にかなり近づいたことが挙げられる）ことも見受けられるが、それ以外の期間においては 1 から 4 までの値を安定して推移している。また、インサンプル期間である 1997 年 12 月末から 2013 年 7 月末において、伝統的 4 資産から推定したリスク回避度が 15 年 JGB スポットレートから推定したリスク回避度の周りを変動しながら推移している。アウトサンプル期間において、フォワード・ルッキングなリスク回避度は、2018 年入り後に、安定的に極めて緩やかに低下しており 2023 年 7 月末には 1.54 となっている。この 1.54 をリスク回避度として採用して、各資産に関する均衡リターンを求めれば、2023 年 7 月末から 2033 年 7 月末までをリターンの計測期間とする均衡リターンが 2023 年 7 月末時点で得られることになる。

図5 NomuraBPIリターン（先行き10年間）、15年JGBスポットレート、15年JGBスポットレートを用いたNomuraBPIリターン（先行き10年間）の推定値



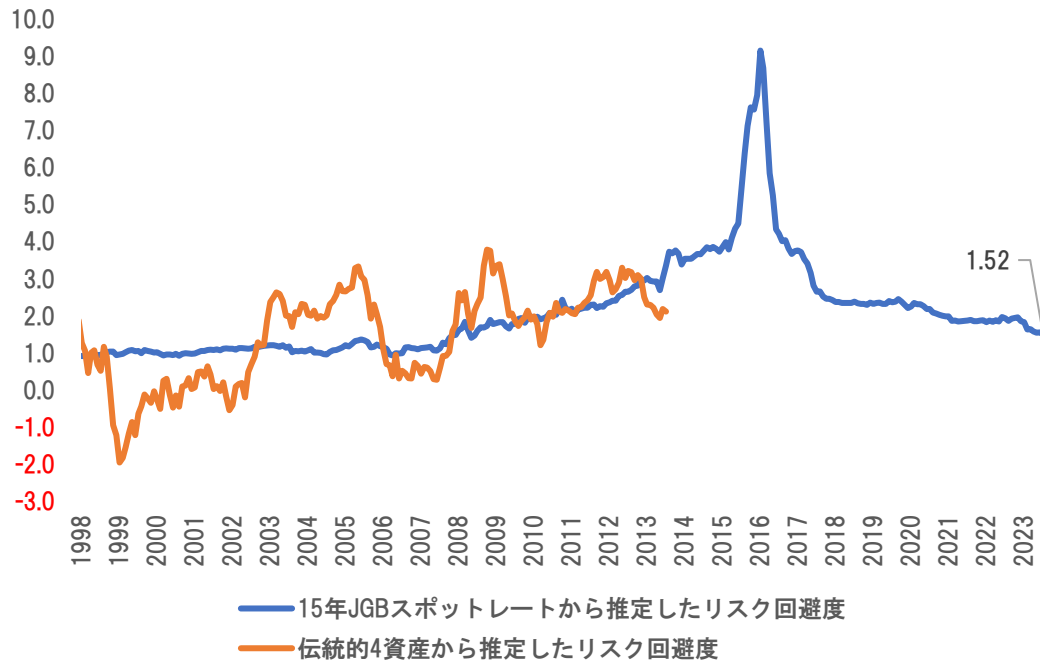
(出所：FactSet、財務省のデータより筆者ら作成)

図6 NomuraBPIリターンのみの情報から推定したリスク回避度 γ^{BPI} の推移



(出所：FactSet、財務省のデータより筆者ら作成)

図7 15年JGBスポットレートから推定したリスク回避度（アウトサンプル期間である2013年8月末以降は、フォワード・ルッキングなリスク回避度と呼ぶ）と伝統的4資産から推定したリスク回避度の推移



（出所：FactSet、財務省のデータより筆者ら作成）

表3 NomuraBPI リターン（先行き10年間）を被説明変数として、スプライン関数を用いて推定した15年JGBスポットレートを説明変数とする回帰分析の結果

回帰統計	
重相関 R	0.6073
重決定 R ²	0.3688
補正 R ²	0.3654
標準誤差	0.0034
観測数	188

分散分析表

	自由度	変動	分散	観測された分散比	有意 F
回帰	1	0.0012	0.0012	108.693	2.5E-20
残差	186	0.0021	1.1E-05		
合計	187	0.0033			

	係数	標準誤差	t	P-値	下限 95%	上限 95%
切片	0.0043	0.0013	3.3350	0.0010	0.0018	0.0069
X 値 1	0.7324	0.0703	10.4256	2.5E-20	0.5938	0.8710

表4 伝統的 4 資産を用いて推定したリスク回避度を被説明変数とし、NomuraBPI リターンのみの情報から得られたリスク回避度 γ^{BPI} を説明変数とする回帰分析の結果

回帰統計	
重相関 R	0.4370
重決定 R2	0.1909
補正 R2	0.1866
標準誤差	1.1329
観測数	188

分散分析表					
	自由度	変動	分散	観測された分散比	有意 F
回帰	1	56.34	56.34	43.90	3.6E-10
残差	186	238.73	1.28		
合計	187	295.06			

	係数	標準誤差	t	P-値	下限 95%	上限 95%
切片	0.8373	0.1252	6.6903	2.5E-10	0.5904	1.0842
X 値 1	0.0962	0.0145	6.6254	3.6E-10	0.0676	0.1249

5. まとめと今後の課題

本稿では、まず、過去の実績データを用いて将来の期待リターンを与えるリスク回避度を推定した。推定に際して用いるウエイトとして、時価総額ウエイト、均等ウエイト、最小分散ポートフォリオウエイトの3通りを準備したが、時価総額ウエイトを用いて推定したリスク回避度が、最も変動は小さく安定して推定していることが分かり、CAPMは相応に効力を有していることが確認された。また、推定されたリスク回避度は、値が正の時期に限定すると0~4の値を推移し、全期間における平均値は1.5であり、先行研究の値と概ね整合的なものとなった。

次に、「将来のNomuraBPIの長期的なリターンを的確に予測できるのは、現在のJGBイールドカーブにおけるどの年限のJGB利回りであろうか？」というリサーチ・クエスチョンに対する回答として、リターン計測期間として10年を採用したNomuraBPIリターンの代用として、15年JGB利回りを用いるのが有効であることを確認した。

最後に、研究の成果物として、伝統的4資産を用いて推定されるリスク回避度と国内債券(NomuraBPI)のみを用いて推定されるリスク回避度との過去の長期間における関係性を確認したうえで、15年JGBスポットレートを用いてフォワード・ルッキングなリスク回避度を推定した。これによって、将来の期待リターンをBLモデルに採用して、投資家が個別資産に対する見通しを持たない場合においても、

ポートフォリオの最適化を試みる事が可能となる。

今後の課題としては、主に、次の4点が挙げられる。

第一に、10年間のNomuraBPIリターンの代用として、15年JGB利回りを用いるのが有効としたが、回帰分析結果からはモデルの説明力が高いとまでは言い切れなかった。複数の年限のJGB利回りを用いて代用することも検討する必要がある。

第二に、第一の課題に関連することであるが、実証分析に用いた期間は、大半が利回り低下局面である。先行き、物価上昇が粘着的となり、利回り上昇局面に入るような場合に、本分析がどの程度の頑健性を有するかについての検証も不可欠である。

第三に、リスク回避度 γ^{BPI} のみを用いた回帰式では、フォワード・ルッキングなリスク回避度 γ を精度高く推定するのは難しい。国内債券市場から得られるリスク回避度 γ^{BPI} に留まらず、外国債券市場と対応する国債利回りにまで拡張して同様の試みを行うことで、フォワード・ルッキングなリスク回避度 γ の推定精度を高めることが出来るかもしれない。

第四に、NomuraBPIリターンの計測期間として10年のみを対象としてフォワード・ルッキングなリスク回避度の推定を行ったが、先行き25年を見込んだ長期のポートフォリオ最適化を行うためには、その年限に応じたフォワード・ルッキングなリスク回避度の推定が課題となる。

このように、克服すべき多くの課題があるのは認識しているが、フォワード・ルッキングなリスク回避度に向けた定量分析の試みが、将来の期待リターン（均衡リターン）を構築するうえで何かの参考になれば幸いである。

[注1] 期待短期金利とスポットレートとの関係

時刻 t における満期 τ の割引債価格、スポットレート、フォワードレートを順に、 $P(t, \tau)$, $Y(t, \tau)$, $f(t, \tau)$ で表す。期待短期金利は、純粋期待仮説に基づき、 N 年後スタートの1年フォワードレートの平均を取ることで算出するものとする。

割引債価格とスポットレートとの関係式は、式(A-1)で与えられる。

$$P(t, \tau) = e^{-Y(t, \tau)(\tau-t)} \quad (A-1)$$

時刻 t を現時点0として、式(A-1)の逆数を取ると、式(A-2)を得る。

$$\frac{1}{P(0, \tau)} = e^{Y(0, \tau) \cdot \tau} \quad (A-2)$$

式(A-2)の左辺は、式(A-3)のように書き換えられる。

$$\frac{1}{P(0, \tau)} = \frac{1}{P(0, 1)} \cdot \frac{P(0, 1)}{P(0, 2)} \cdot \frac{P(0, 2)}{P(0, 3)} \cdot \dots \cdot \frac{P(0, \tau-1)}{P(0, \tau)} = e^{f(0, 1) \cdot 1} \cdot e^{f(1, 1) \cdot 1} \cdot e^{f(2, 1) \cdot 1} \cdot \dots \cdot e^{f(\tau-1, 1) \cdot 1} \quad (A-3)$$

式(A-3)の両端の自然対数を取ると、左端の自然対数を取ったものは、式(A-2)から $Y(0, \tau) \cdot \tau$ となり、

右端の自然対数を取ったものは、 $f(0,1) + f(1,1) + f(2,1) + \dots + f(\tau - 1,1)$ であるから、両者を共に τ で割ると式(A-4)を得る。

$$Y(0, \tau) = \frac{f(0,1)+f(1,1)+f(2,1)+\dots+f(\tau-1,1)}{\tau} \quad (\text{A-4})$$

式(A-4)の左辺は、現時点 0 における満期 τ のスポットレートを表す。右辺は、スタート時点が、現時点 0 から 1 年毎に $\tau - 1$ 年先までの満期 1 年のフォワードレートの単純平均を意味する。よって、 $\tau = 10$ の場合には、式(A-4)のは、10 年 JGB スポットレートが、N 年後スタートの 1 年フォワードレートを $N=0 \sim 9$ として求めて平均を取ることによって得られた期待短期金利に等しいことを意味する。

[注 2] 伝統的 4 資産のベンチマークインデックス

GPIF の政策ベンチマークを踏まえ、伝統的 4 資産のベンチマークインデックス（1984 年 12 月末から 2023 年 6 月末までの月次）としては以下のものを分析に用いた。

国内債券については、2008 年 3 月末以前は NomuraBPI 総合を、2008 年 3 月末以降は NomuraBPI「除く ABS」を使用した。国内株式については TOPIX（配当込み）を使用した。外国債券については WGBI（除く日本、円ベース）を使用した。外国株式については、1987 年 12 月末以前は MSCI KOKUSAI（円ベース）を、1987 年 12 月末以降は ACWI（除く日本、円ベース）を使用した。

[注 3] 分析に使用する金利データについて

節 2 及び節 4 の分析では、GPIF における期待短期金利の計算方法に合わせるために、金利データとしては、JGB 利回りからスプライン関数を用いて推定したスポットレートを用了。

他方で節 3 の分析では、NomuraBPI の将来の実現リターンに最も一致している JGB 利回りの年限を検証することが目的であるため、JGB 利回りそのものを用了。

[注 4] NomuraBPI リターン（先行き 10 年間）の国内債リスクプレミアム

国内債リスクプレミアム $\mu_1 - r_f$ は、1) NomuraBPI リターン（先行き 10 年間）が、NomuraBPI リターン $\doteq 0.004338 + 0.732444 \times 15$ 年 JGB スポットレートと表されること、2) [注 1] から期待短期金利 r_f が 10 年 JGB スポットレートに概ね等しいことから、本稿の設定に関しては、国内債リスクプレミアム $\doteq (0.004338 - 0.267556 \times 10$ 年 JGB スポットレート) $+ 0.732444 \times (10 - 15$ 年 JGB スプレッド)、のように把握していることになる。

 参考文献

- [1] Ang, Andrew. Asset management: A systematic approach to factor investing. *Oxford University Press*, 2014.
- [2] Black, F. and Litterman, R. (1992), “Global Portfolio Optimization,” *Financial Analyst Journal*, Vol.48, No.5, pp.28–43.
- [3] Choi, Syngjoo, et al. “Consistency and heterogeneity of individual behavior under uncertainty.” *American economic review* 97.5 (2007): 1921–1938.
- [4] Clarke, R. De Silva, H., and Thorley, S. (2006) “ Minimum–Variance Portfolios in the US Equity Market,” *Journal of Portfolio Management*, Vol. 33, No.1, pp. 10–24.
- [5] Holt, Charles A., and Susan K. Laury. “Risk aversion and incentive effects.” *American economic review* 92.5 (2002): 1644–1655.
- [6] Paravisini, Daniel, Veronica Rappoport, and Enrichetta Ravina. “Risk aversion and wealth: Evidence from person-to-person lending portfolios.” *Management Science* 63.2 (2016): 279–297.
- [7] Satchell, S., and Scowcroft A., (2000) “A demystification of the Black–Litterman model: Managing quantitative and traditional portfolio construction,” *Journal of Asset Management*, Vol.1,2 pp. 138–150.
- [8] 中川慧 (2019) 「ブラック・リッターマン法を用いたリスクベース・ポートフォリオの拡張」『ファイナンシャル・プランニング研究』 pp. 22–33.
- [9] 年金積立金管理運用独立行政法人(GPIF) (2023) 『2022 年度 業務概況書』
- [10] 山田徹・上崎勲 (2009) 「低ボラティリティ株式運用」『証券アナリストジャーナル』 47 (6) pp. 97–110.