

2023年2月10日

宮崎 浩一

島田 和裕

## EXECUTIVE SUMMARY

- ▶ 私募不動産は、伝統的資産クラスとの低相関や低流動性を反映した高いインカム収益の観点から代替投資対象の1つとして注目されている。しかしながら、私募不動産のリターンデータは鑑定の際に生じる平滑化の影響を受けて自己相関を持っていることから、当該データの実際の利用にあたっては予めデータの適切な非平滑化が講じられている。
- ▶ 私募不動産の価格は主に不動産鑑定士による「鑑定価格」に基づくものであり、非平滑化されたリターンデータ自体はあくまでも鑑定価格の範疇であるので、実際に市場で売買される価格（以下、「売買価格」という。）に基づくものとは言えない、と考えられる。
- ▶ 本研究では、「非平滑化された私募不動産のリターンそのものを私募不動産の売買価格ベースのリターンと看做すわけにはいかないのではないか」との問題意識に基づき、非平滑化された私募不動産のリターンのデータと上場市場から得られる J-REIT のリターンのデータの両方を利用する形で、私募不動産の売買価格ベースでのリターンとリスクのモデル化を提案している。

(注) 本ワーキングペーパーは、GPIF 職員の研究成果をとりまとめたものであり、文章中で示された内容や意見は GPIF の公式見解を示すものではありません。

## 1. はじめに

2022 年上期から世界的に金利が上昇する局面に入っているものの、我が国の債券利回りの絶対水準は依然として極めて低い水準であり、そうした状況の下では、上場不動産投資信託である J-REIT が持つリスク・リターン特性は注目される。また、J-REIT よりも流動性が低い私募リートについては、流動性リスクプレミアムを上乗せした更に高いリターンが見込まれる。このような背景から、2022 年現在、日本の不動産証券化市場は、40 兆円を上回る市場規模にまで成長している。

田邊(2022)は、日本の不動産証券化を数少ないイノベーションと評価したうえで、これまでの不動産証券化市場の歩みを振り返り、同市場の今後の成長の方向性について、Arbitrage(裁定)、Borderless(ボーダレス)、Concentration(集中)のキーワードを掲げて整理している。特に、Arbitrage(裁定)に関しては、「不動産と金融の融合や不動産市場内における他の不動産とはもちろんのこと、他の金融商品との Arbitrage(裁定)を一層促進する。」として、不動産証券化市場が不動産市場と金融市場をつなぐプラットフォームとなるような展開を予想している。不動産証券化市場で取引される資産のなかでも上場 REIT である J-REIT は流動性が相応にあり、伝統的資産となる国内債券、国内株式と同様に円表示で価格が日々

---

更新されるため、伝統的資産との相対価値分析が比較的容易にできることから、田邊(2022)が指摘するように他の金融商品との Arbitrage(裁定)が見込まれる。REIT と実物不動産との Arbitrage(裁定)に関しては、川口(2004)において既に指摘されている。川口(2004)は、「REIT はファンダメンタル価値を観測できるので、REIT の株価 (P) とそれに対応する NAV との比率は投資家に極めて重要な情報をもたらす。」とし、この指標が Arbitrage(裁定)に利用可能であることを、米国 REIT に関する Gentry 等(2003)の研究を引用のうえ解説している。また、島田・宮崎・大石(2021)は、オルタナティブ資産への投資が伝統的資産への投資に比べてリスク・リターン特性の点で望ましいか、オルタナティブ資産と伝統的資産とを組み合わせたポートフォリオを構築した場合にリスク・リターン特性がどのように改善するか、等について吟味するためのファーストステップとして、J-REIT をオルタナティブ資産とみなし、J-REIT をポートフォリオにおいて独立した資産クラスとして別管理する必要性について摸索している。

徳島(2022)は、オルタナティブ投資の中でも、不動産などの低流動性資産に対する投資は、市場インデックスをベンチマークとする伝統的な資産クラスとは運用特性が異なるため、投資残高が拡大した時点では、伝統的な資産クラスとは別に取り扱い、新しい資産クラスとして考えることの必要性を指摘している。そのうえで、「投資対象の個別性が高いことから、資産配分策定の前提となる過去のリスク値や相関係数をそのまま用いることは不適切な可能性が高い。その結果、単純な平均分散法の利用が好ましいとは思えず、リスク管理において様々な工夫が求められる。」との考えを提示している。

田邊(2022)が想定する不動産市場内における J-REIT、私募 REIT、不動産の間での Arbitrage(裁定)やこれらと他の金融商品との Arbitrage(裁定)が働くようになるには、これらの商品の間で、高い精度でリスク・リターン特性を比較できることが前提となる。また、先述のように徳島(2022)が考える背景には、私募 REIT や不動産に関しては、取引の参考価格が鑑定価格ベースとなっており、この鑑定価格が過去の鑑定価格から大きく変動しないように平滑化された形で値付けされているという実態がある。つまり、私募 REIT や不動産に関しては、低流動性のためにリターンが自己相関を持つため、伝統的資産のように日々のリターンが概ね同一の正規分布に従うと仮定することができず、これらの仮定を前提とした平均分散法の利用は不適切となる。

本研究では、まず、日本の不動産に関する鑑定価格リターンに対して、非平滑化を行うことで鑑定価格リターンに内在する自己相関を除去し、概ね時系列的に独立で同一の正規分布に従うリターンとなるように変換する。このようにして非平滑化されたリターンを「非平滑化リターン」と呼ぶ。非平滑化の手法は、Spencer, Andrei, and Andrea (2020)によると、大きく分けて 2 通りある。一つは、主に不動産ファンドのリターンを対象とした AR(H)型の時系列モデルに依拠する Geltner (1991, 1993) のアプローチであり、もう一方は、主にヘッジファンドや PE ファンドのリターンを対象とした MA(H)型の時系列モデルに依拠する Getmansky, Lo, and Makarov (2004) のアプローチである。本研究では、非平滑化の対象が不動産の鑑定価格リターンであるため、Geltner (1991, 1993) のアプローチを採用する。

次に、売買価格ベースでのリターンとリスクのモデル化についてであるが、先行研究では、非平滑化リターンから単純に平均リターンやボラティリティを求めている。本研究における問題意識は、「不動産鑑定士が想定する実勢価格が、必ずしも、売買価格と一致するとは限らない。よって、非平滑化リターンそのものを私募不動産の売買価格ベースのリターンと看做すわけにはいかないのでは？」というものである。そこで、J-REIT の価格が実質的な不動産の所有権の移転を伴う売買価格であることに着目し、非平滑化リターンのデータと J-REIT のリターンのデータの両方を利用する形で、売買価格ベースでのリターンとリスクのモデル化を提案する。また、当該提案モデルの特徴を把握するための実証分析も行

う。当該提案モデルを用いれば、不動産市場内や他の金融商品とリスク・リターン特性を高い精度で比較することが可能となる。

ポートフォリオ選択の実証分析においては、低流動性資産となる私募不動産および J-REIT の 2 資産を伝統的 4 資産に加えて、シャープ・レシオ最大化の観点やリスク・リターンの観点から最適なポートフォリオ選択を検討する。その際には、私募不動産の参照データとして不動産証券化協会 (ARES) のデータを活用することとし、私募不動産のリスク・リターンについて、「ARES の元データに依拠するもの」、「非平滑化された ARES データに依拠するもの」、「提案モデルによるもの」の合計 3 通りに関する分析を行い、ポートフォリオ選択における提案モデルの有用性を吟味する。

本論文の構成は、以下の通りである。第 2 節は、不動産ファンドのリターンを対象とした AR(H)型の時系列モデルに依拠する非平滑化手法に関してコンパクトに紹介する。第 3 節は、私募不動産の売買価格ベースのリスク・リターンモデルを提案し、実証分析によりモデルの特徴を把握する。第 4 節は、私募不動産および J-REIT の 2 資産を伝統的 4 資産に加えたポートフォリオ選択に関する実証分析をシャープ・レシオ最大化の観点から行う。最終章では、まとめと今後の課題を付す。

## 2. 不動産ファンドのリターンを対象とした非平滑化 (AR(H)型)の時系列モデルに依拠する Geltner (1991, 1993) のアプローチ

### 2.1 非平滑化された ARES 価格リターン

任意の期における観測可能なリターン(鑑定価格や ARES 価格のリターンで平滑化されたもの) $R_t^o$ は、この期の非平滑化リターン(平滑化される前の不動産鑑定士が実勢を反映していると想定するリターン、同じ。)  $R_t$ と、この期より以前の観測可能な価格のリターン(AR(H)モデルを仮定する場合、 $R_{t-1}^o$ ,  $R_{t-2}^o, \dots, R_{t-H}^o$ )とを用いて、式(1)のように形成されるものとする。

$$R_t^o = \theta^{(0)} \cdot R_t + \sum_{h=1}^H \theta^{(h)} \cdot R_{t-h}^o \quad (1)$$

ここで、各  $\theta$  は、観測可能なリターンにおける陳腐度合い(時期の古いデータほど反映しないようにすることとする度合い)を表現するパラメータであり、

$$\sum_{h=0}^H \theta^{(h)} = 1 \quad (2)$$

を満たす。また、期間  $t$  における非平滑化リターン $R_t$ は、式(3)のドリフトのあるブラウン運動に従うとする。

$$R_t = \mu + \eta_t \quad , \quad E[\eta_t] = 0 \quad , \quad \eta_t \sim i.i.d \quad (3)$$

式(3)を式(1)に代入して整理すると、次のように式(4)を得る。

$$\begin{aligned} R_t^o &= \theta^{(0)} \cdot (\mu + \eta_t) + \sum_{h=1}^H \theta^{(h)} \cdot R_{t-h}^o \\ &= \theta^{(0)} \cdot \mu + \sum_{h=1}^H \theta^{(h)} \cdot R_{t-h}^o + \theta^{(0)} \cdot \eta_t \\ &= (1 - \sum_{h=1}^H \theta^{(h)}) \cdot \mu + \sum_{h=1}^H \theta^{(h)} \cdot R_{t-h}^o + \theta^{(0)} \cdot \eta_t \\ &= \mu + \sum_{h=1}^H \theta^{(h)} \cdot (R_{t-h}^o - \mu) + \theta^{(0)} \cdot \eta_t \end{aligned} \quad (4)$$

### 2.2 非平滑化リターンのパラメータ推定

観測可能なリターン $R_t^o$ から平均を除去した観測可能な平均除去リターン $X_t$ を式(5)のように定義し、式(4)の  $\theta^{(0)} \cdot \eta_t$  を誤差項  $\varepsilon_t = \theta^{(0)} \cdot \eta_t$  と捉えると、観測可能な平均除去リターン  $X_t$  のみを用いた重回帰式(6)から  $\varepsilon_t = \theta^{(0)} \cdot \eta_t$  を抽出することができる。

$$X_t = R_t^o - \mu \quad (5)$$

$$X_t = \theta^{(1)}X_{t-1} + \theta^{(2)}X_{t-2} \cdots + \theta^{(H)}X_{t-H} + \varepsilon_t \quad (6)$$

重回帰式(6)のパラメータ  $\theta^{(1)}, \theta^{(2)}, \dots, \theta^{(H)}$  と誤差項  $\varepsilon_t$  が得られたなら、 $\theta^{(0)} = 1 - \sum_{h=1}^H \theta^{(h)}$  なので、

$\eta_t = \frac{\varepsilon_t}{1 - \sum_{h=1}^H \theta^{(h)}}$  が得られ、これを式(3)に代入して、非平滑化リターン  $R_t$  は、

$$R_t = \mu + \frac{\varepsilon_t}{1 - \sum_{h=1}^H \theta^{(h)}} \quad (7)$$

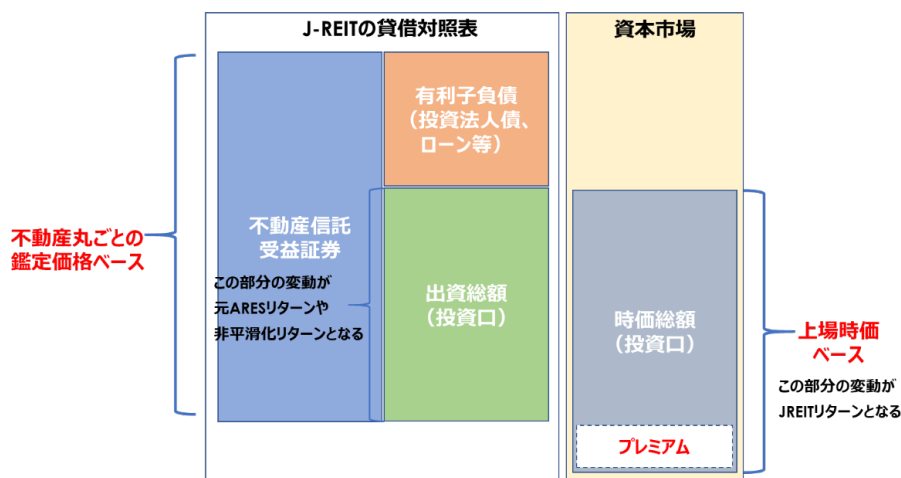
と推定される。

### 3. 本研究モデルとパラメータ推定法

#### 3.1 モデル

第2節では、先行研究に従って非平滑化リターン  $R_t$  を式(3)でモデル化した。このモデルを発展させて、本研究モデルを構築するに際しての問題意識は、「不動産鑑定士が想定する実勢価格が、必ずしも、売買価格と一致する訳ではないので、非平滑化リターン  $R_t$  を現実の投資収益を表すリターンと看做すわけにはいかないのではないか？」というものである。より具体的に、図1に示す J-REIT に関する2つの NAV を用いて説明する。J-REIT が投資している不動産の信託受益証券（貸借対照表の左側）に対して不動産鑑定士が付ける価格を「鑑定 NAV」と呼ぶことにする。鑑定 NAV から有利子負債（投資法人債、ローン等）を差し引いた出資総額（投資口）の価格が、問題意識にある不動産鑑定士が想定する実勢価格に相当する。鑑定 NAV の基となる個別物件の鑑定価格は基本的に年2回の更新頻度であるが、この価格で売買可能というわけではない。これに対して、この出資総額（投資口）を上場して J-REIT となったものは、資本市場で日々売買され、時価総額（投資口）（以下、「上場 NAV」という。）が日次で公表される。また、出資総額（投資口）は不動産の私募での評価であり、時価総額（投資口）は資本市場での評価であるが、両者に乖離があったとしても、同じ不動産であれば究極的にはいずれは収斂すべきものである。

【図1：鑑定 NAV と上場 NAV】



（出所：日本不動産研究所資料を基に筆者ら作成）

このような理由から、私募として取引する不動産の売買価格リターンを推定するには、非平滑化リターン $R_t$ のデータだけでは不十分であり、J-REITのリターンのデータも活用すべきである。そこで、本研究モデルでは、売買価格が、売買コスト（流動資産における Bid-Offer Spread に相当）などの影響もあることから、不動産鑑定士が想定する実勢価格から乖離する状況を考慮する。私募として取引する不動産の売買価格リターン ( $R_t^P$ ) に関する平均 ( $\mu$ ) と分散 ( $\sigma^2$ ) を、非平滑化リターン $R_t$ のデータと J-REIT のリターンのデータの両方を用いて推定したうえで、これらを利用して非平滑化リターン $R_t$ をスケール変換することによって売買価格リターン ( $R_t^P$ ) をモデル化する。

ここで、非平滑化リターン $R_t$ を新たに $R_t^A$ と記す。式(7)は、新たな記法では、式(8)となる。

$$R_t^A = \mu_A + \varepsilon_t^A, \quad \varepsilon_t^A \sim i.i.d. N(0, (\sigma^A)^2) \quad (8)$$

また、J-REIT のリターン $R_t^J$ は、式(9)、式(10)に従う。

$$R_t^J = \mu_J + \varepsilon_t^J, \quad \varepsilon_t^J \sim i.i.d. N(0, (\sigma^J)^2) \quad (9)$$

$$\text{correlation}(R_t^J, R_t^A) = \rho_{J,A} \quad (10)$$

私募として取引する不動産の売買価格リターン $R_t^P$ を次のようにモデル化する。

$$\frac{R_t^P - \mu}{\sigma} := \frac{R_t^A - \mu_A}{\sigma^A}. \quad (11)$$

書き換えると、

$$R_t^P := \left( \mu - \frac{\sigma}{\sigma^A} \mu_A \right) + \frac{\sigma}{\sigma^A} R_t^A. \quad (12)$$

ここで、

$$\mu = \frac{1}{2}(\mu_A + \mu_J) \quad (13)$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{2}((\sigma^A)^2 + (\sigma^J)^2) + \frac{1}{4}(\mu_A - \mu_J)^2 \quad (14)$$

$$\rho = \left[ \rho_{J,A} \sigma^A \sigma^J - \frac{1}{4}(\mu_A - \mu_J)^2 \right] / \left[ \frac{1}{2}((\sigma^A)^2 + (\sigma^J)^2) + \frac{1}{4}(\mu_A - \mu_J)^2 \right] \quad (15)$$

本節において既に述べた背景を踏まえて、式(13)から式(15)にあるモデルのパラメータ導出の道筋について述べる。式(8)～式(10)で与えられる $R_t^A$ と $R_t^J$ の従う分布は、式(16-1)、式(16-2)にある 2 次元の正規分布に従う。

$$f(R_t^A, R_t^J, \theta) = \frac{1}{2\pi\sigma^A\sigma^J\sqrt{1-(\rho_{J,A})^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-(\rho_{J,A})^2)} Q(R_t^A, R_t^J)\right\} \quad (16-1)$$

$$Q(x_i, y_i) = \frac{(R_t^A - \mu_A)^2}{(\sigma^A)^2} - 2\rho_{J,A} \frac{(R_t^A - \mu_A)(R_t^J - \mu_J)}{\sigma^A\sigma^J} + \frac{(R_t^J - \mu_J)^2}{(\sigma^J)^2} \quad (16-2)$$

先に述べたように、出資総額（投資口）と時価総額（投資口）は、同じ不動産の私募での評価と資本市場での評価であるため、両者に一時的な乖離があったとしても究極的にはリスク・リターン特性が同じものに収束すべきである。よって、私募として取引される不動産の売買価格リターン $R_t^P$ の平均 $\mu$ と分散 $\sigma^2$ は、式(16-1)、式(16-2)において、パラメータを $\mu_A = \mu_J = \mu$ 、 $\sigma^A = \sigma^J = \sigma$ 、 $\rho_{J,A} = \rho$ と制約したうえで、対数尤度を最大化して得られるものでモデル化する。式(13)～式(15)に関する導出の詳細は付録を参照されたい。

---

(Remark)

ここでは、J-REIT の時価総額に対して、J-REIT が投資している不動産全体の出資総額（投資口）を私募で取引する場合を想定して、売買価格リターンを推定する手法を示した。個別の不動産を私募で取引する場合の売買価格リターンを推定するには、当該不動産の鑑定 NAV（元 ARES リターン）データに加えて、地域や用途が合致するようにカスタマイズされた上場 NAV（J-REIT のリターン）のデータ構築が必要になる。

## 3.2 本研究モデルのパラメータ推定法

### 3.2.1 データ

本研究モデルのパラメータ推定におけるデータは以下の通りとする。

- (1) 株式部分に対応する J-REIT が保有する個別物件を対象とした ARES Japan Property Index のリターン（以下、「元 ARES リターン」という。）のデータを非平滑化して得られる非平滑化リターン  $R_t^A$  の時系列データ。
- (2) J-REIT のリターン  $R_t^J$  の時系列データ。

### 3.2.2 推定の手順

本研究モデルのパラメータ推定の手順は以下の通りである。

Step1 :

データ(1)の平均と分散を求めれば、それぞれ、 $\mu_A$ と $(\sigma^A)^2$ の推定値となる。データ(2)の平均と分散を求めれば、それぞれ、 $\mu_J$ と $(\sigma^J)^2$ の推定値となる。また、データ(1)とデータ(2)の相関係数を求めれば、 $\rho_{J,A}$ の推定値となる。

Step2 :

Step1 で得られた各パラメータの値を式(13)～式(15)に代入して、新モデルのパラメータ  $\mu$ 、 $\sigma$ 、 $\rho$  を得る。

## 3.3 本モデルの特徴を把握するための実証分析

### 3.3.1 非平滑化リターンのパラメータ推定

まず、月次の元 ARES リターンに AR(H)モデルを適用して得られる自己回帰パラメータを最尤法により推定する。AR モデルのラグ数 H は AIC 規準に基づき選定する。ここで推定したパラメータ値を式(7)に代入して得られるリターンが、非平滑化された ARES 価格リターンである。次に、この非平滑化リターンが自己相関を持たないことを確認するために、非平滑化リターンを対象にして AR(H)モデルを再び適用して、推定された自己回帰パラメータの有意性を確認し、自己回帰パラメータが 0 であるという帰無仮説が棄却されなければ自己相関を持たないものと判断する。2003 年 4 月から 2021 年 12 月までの月次の元 ARES リターンを用いて得られたパラメータの推定結果を表 1 に示した。AIC 規準に基づいて選択されたラグ数は 10 である。月次の元 ARES リターンに AR(10)モデルを適用して得られた推定結果を見ると、ラグ 1 の自己回帰係数の値は正であり、その t 値は 18.62 と有意であることを示唆しており強い正の自己相関の存在が確認される。更に、ラグ 5 とラグ 10 の自己回帰パラメータは、負の値となり、それらの t 値の絶対値は 3 を超えて有意であることから、自己相関を除去するためにはラグ数を 10 まで取ることの必要性が伺える。これに対して、非平滑化リターンを対象に AR(10)モデルを適用した推

定結果を見ると、何れの自己回帰パラメータの t 値も 1 程度以下となっており、月次の元 ARES リターンに内在していた自己相関が適切に除去される形で非平滑化が行われて、確かに非平滑化リターンが得られたものと確認できる。

【表 1：自己回帰係数と t 値】

元ARESリターンの自己回帰係数とt値

	$\mu$	$\theta^{(1)}$	$\theta^{(2)}$	$\theta^{(3)}$	$\theta^{(4)}$	$\theta^{(5)}$	$\theta^{(6)}$	$\theta^{(7)}$	$\theta^{(8)}$	$\theta^{(9)}$	$\theta^{(10)}$
係数	0.00	1.25	0.16	-0.15	-0.07	-0.43	0.06	0.02	0.14	0.21	-0.22
t値	2.17	18.62	1.48	-1.35	-0.67	-4.03	0.57	0.23	1.37	2.02	-3.29

非平滑化リターンの自己回帰係数とt値

	$\mu$	$\theta^{(1)}$	$\theta^{(2)}$	$\theta^{(3)}$	$\theta^{(4)}$	$\theta^{(5)}$	$\theta^{(6)}$	$\theta^{(7)}$	$\theta^{(8)}$	$\theta^{(9)}$	$\theta^{(10)}$
係数	0.01	-0.03	0.03	0.04	0.02	-0.01	-0.06	-0.03	0.02	0.05	0.09
t値	2.36	-0.40	0.37	0.54	0.30	-0.15	-0.84	-0.45	0.34	0.67	1.23

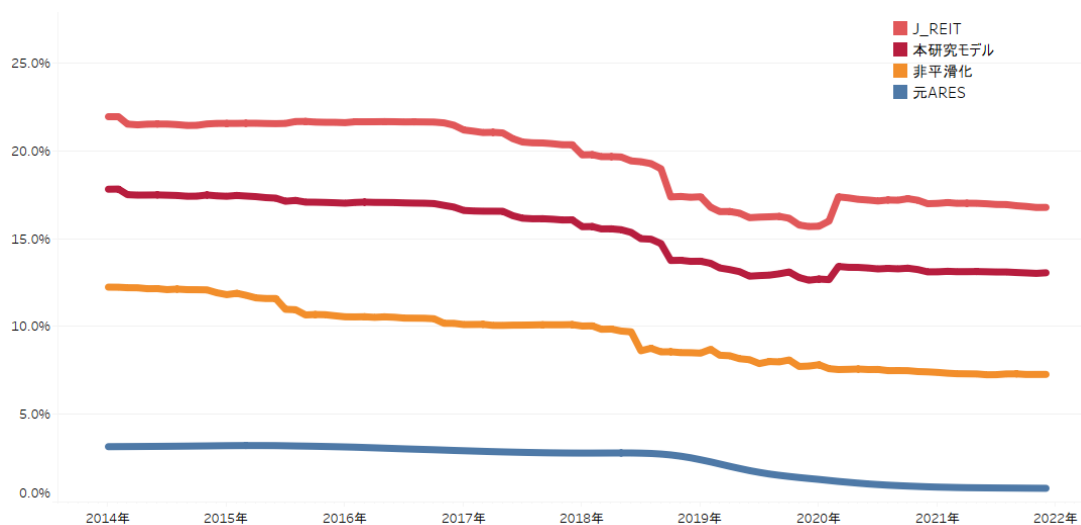
(出所：ARES データより筆者ら作成)

### 3.3.2 ボラティリティと相関係数の推移

本研究モデルが生成するリターンのボラティリティの水準を把握するために、本研究モデルのリターンのボラティリティ、元 ARES リターンのボラティリティ、非平滑化リターンのボラティリティ、J-REIT のリターンのボラティリティの合計 4 つを、月次リターンに基づいて過去 10 年間及び過去 3 年間の 2 つの期間についてローリングで求めて比較する。相関係数に関して、本研究モデルは、非平滑化リターンのボラティリティを市場リターンのデータも加味して現実的なものへと近づけたものとの認識から、私募として取引する不動産の売買価格リターンと他資産リターンとの相関係数を、非平滑化リターンと他資産リターンとの相関係数に等しいと仮定している。よって、ここでは、元 ARES リターンと複合ベンチマークリターン（国内債券、国内株式、外国債券、外国株式を 4 分の 1 ずつ保有したポートフォリオのリターンを表す、以下同じ。）との相関係数、非平滑化リターンと複合ベンチマークリターンとの相関係数、J-REIT のリターンと複合ベンチマークリターンとの相関係数の合計 3 つを、月次リターンに基づいて過去 10 年間及び過去 3 年間の 2 つの期間についてローリングで求めて比較する。これらの相関係数は、不動産を伝統 4 資産のポートフォリオに組み込んだポートフォリオのシャープ・レシオを検討する際の参考指標となる。

長期ボラティリティ（過去 10 年間のデータに基づくローリングで求めたもの）を図 2 に示した。4 つの長期ボラティリティは、時系列的なトレンドは概ね等しいが、水準は大きく異なっている。より詳細に見ると、「J-REIT」と「本研究モデル」に関しては、2014 年から 2017 年の時期に高かったボラティリティが、2017 年以降 2019 年までの時期に急速に低下し、2020 年に再び上昇して、以降は安定的に推移している。この背景には、長期ボラティリティの計測に利用する月次リターンが過去 10 年間であるために、2014 年から 2017 年のボラティリティにはリーマンショックの時期が含まれていること、2020 年にはコロナショックが発生したこと、といった要因がある。興味深いのは、非平滑化に関しては、2014 年の時期に高かったボラティリティが「J-REIT」と「本研究モデル」に先駆けて低下していること、コロナショックの影響を受けていないことである。また、「元 ARES」に関しては月次リターンの時系列相関が高いため、リーマンショックの影響が明白に抜け落ちる時期が、「J-REIT」や「本研究モデル」よりも 1~2 年程度遅れていること、コロナショックの影響を受けていないことが読み取れる。

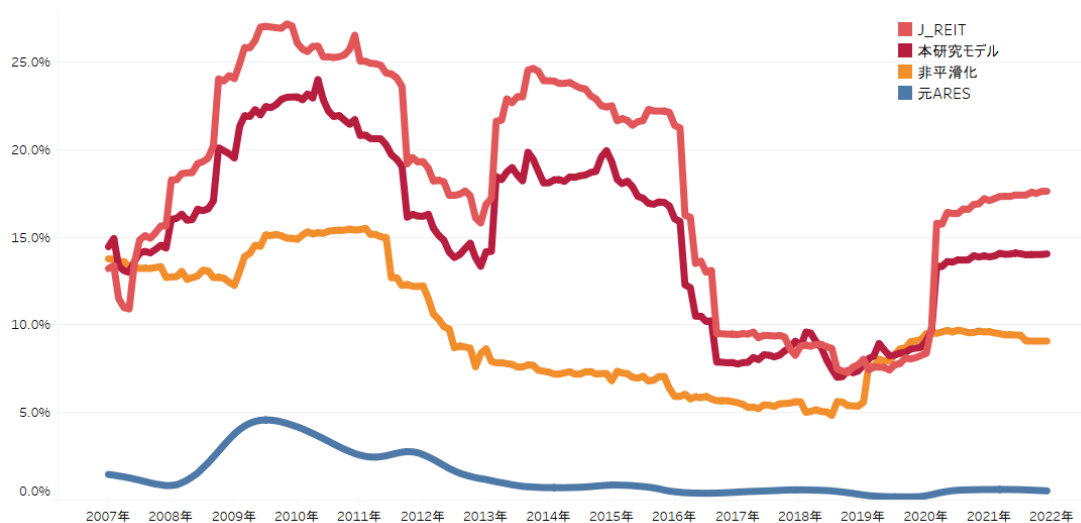
【図2：長期ボラティリティ（120 カ月ローリング、年率換算）】



(出所：FactSet、ARES のデータより筆者ら作成)

短期ボラティリティ（過去3年間のデータに基づくローリングで求めたもの）を図3に示した。予想通り、短期ボラティリティの変動は長期ボラティリティの変動よりもはるかに大きいことがわかる。長期ボラティリティとの対比で興味深いのは、「非平滑化」や「元 ARES」においてもリーマンショックの影響を受けて短期ボラティリティの上昇が確認されること、特に、「非平滑化」に関してはコロナショックの影響も相応に受けていることである。また、2008年のリーマンショック前やコロナショック前の経済ショックの影響を受けていない時期においては、「J-REIT」、「本研究モデル」、「非平滑化」の各短期ボラティリティの水準が概ね等しいことである。

【図3：短期ボラティリティ（36 カ月ローリング、年率換算）】

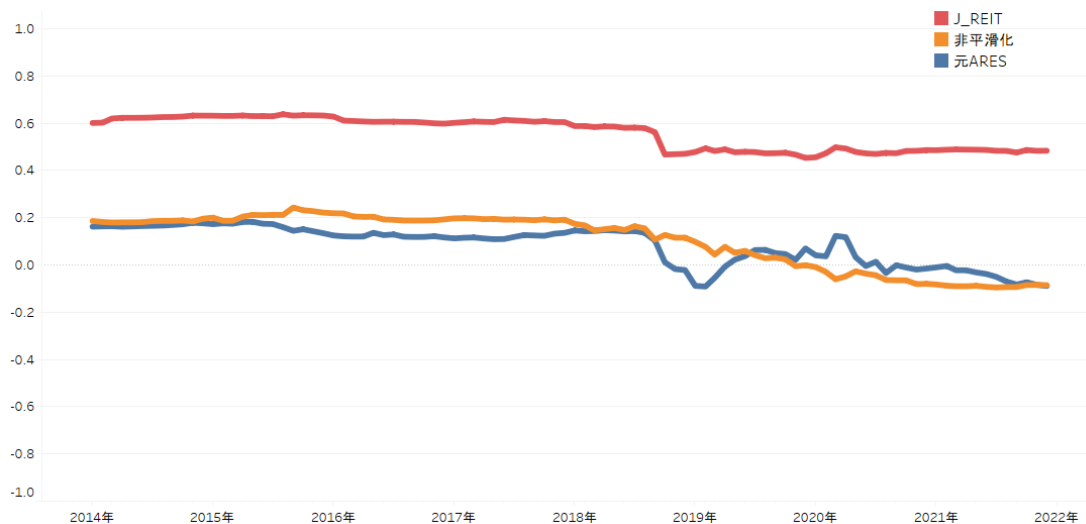


(出所：FactSet、ARES のデータより筆者ら作成)



長期の相関係数（過去 10 年間のデータに基づくローリングで求めたもの）を図 4 に示した。複合ベンチマークリターンとの相関係数であるから、不動産に関するリターンがマーケットリターン（J-REIT のリターン）か鑑定価格リターン（元 ARES リターン）かによって水準が大きく異なる。「J-REIT」は、リーマンショック期のデータを含む時期は 0.6 程度で、その時期のデータが抜け落ちても 0.5 程度で維持されているのに対し、「非平滑化」や「元 ARES」は、リーマンショック期のデータを含む時期は 0.2 程度で、その時期のデータが抜け落ちるに従って低下して 0 付近で安定している。よって、ポートフォリオのリスクを分散で計量する場合、J-REIT を長期的にポートフォリオに組み込むよりも私募として取引する不動産を組み込んだ方が大きな分散投資効果を得られる。

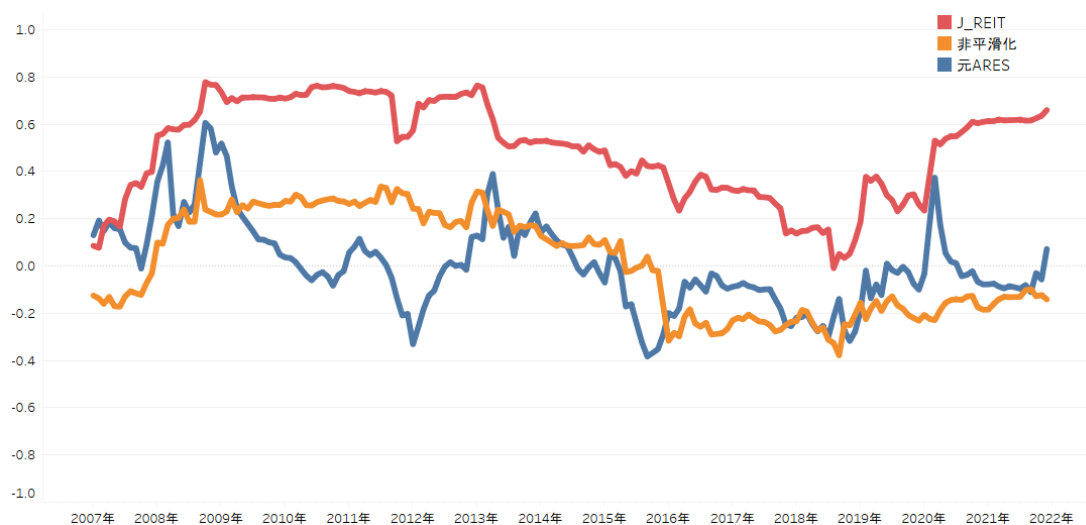
【図 4：複合 BM との相関係数（120 カ月ローリング）】



（出所：FactSet、ARES のデータより筆者ら作成）

短期の相関係数（過去 3 年間のデータに基づくローリングで求めたもの）を図 5 に示した。短期の相関係数は、長期の相関係数とは様子が全く異なる。マーケットリターンである J-REIT のリターンであっても複合ベンチマークリターンとの相関係数は、短期的には 0 から 0.8 まで大きく変動するため、短期でのリバランスを想定するなら時期によっては J-REIT でも分散投資効果が期待できる。

【図 5：複合 BM との相関係数（36 カ月ローリング）】



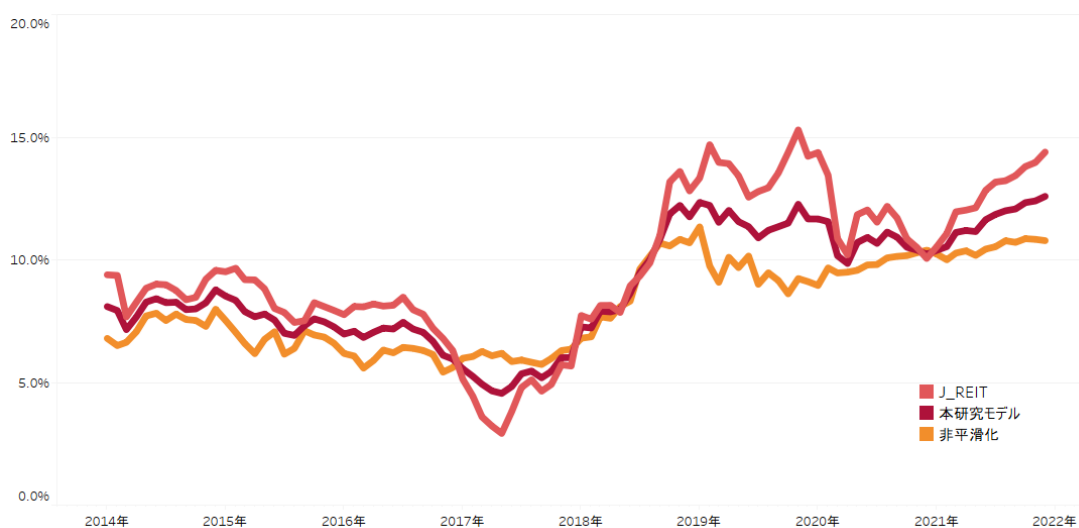
（出所：FactSet、ARES のデータより筆者ら作成）

興味深いのは、「非平滑化」の動きが長期の相関係数の水準となる0を挟んで「J-REIT」と類似の推移をしているのに対し、「元 ARES」は、0を挟んで推移しているものの「J-REIT」の推移とは大きく異なる点である。これは、非平滑化リターンが元 ARES リターンを非平滑化して得られたリターンであり、時系列相関が概ねないという点で J-REIT のリターンに近いことが要因として挙げられる。

### 3.3.3 不動産投資のリターンと相対価値分析

J-REIT のリターン、本研究モデルのリターン、非平滑化リターンに関して、過去 10 年間の月次リターンを年率換算して平均を取りローリングしたものを図 6 に示した。平均の推移を見ると、その変動は、大きい順に、「J-REIT」(3%~15%)、「本研究モデル」(5%~12%)、「非平滑化」(6%~11%) である。本研究モデルのリターンを表す式(13)は、本研究モデルのリターンが J-REIT のリターンと非平滑化リターンとの平均となることを意味するので、図 6 の結果と整合的である。

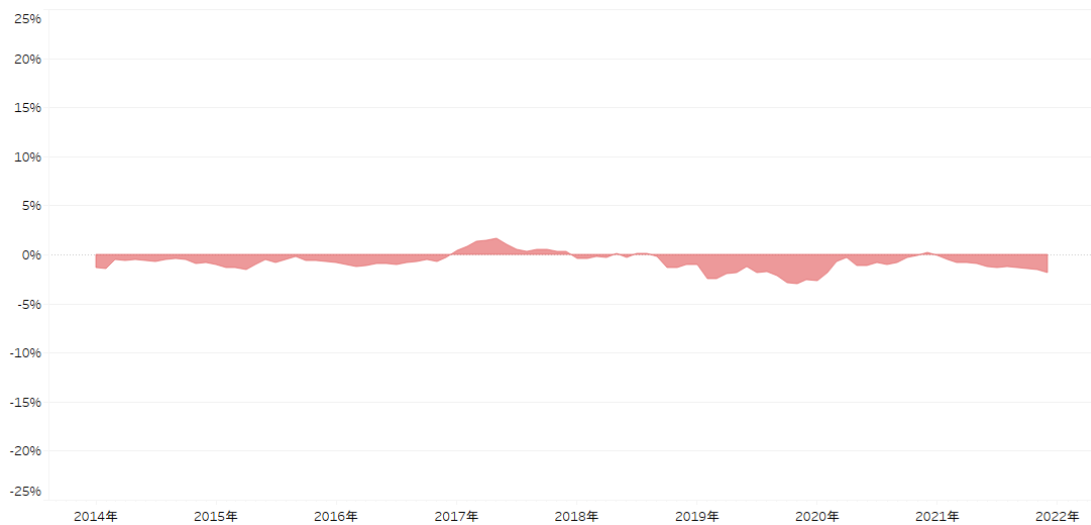
【図 6：月次リターン（120 カ月ローリング、年率換算）】



(出所：FactSet、ARES のデータより筆者ら作成)

非平滑化リターンから本研究モデルのリターンを引いた平均リターンの推移を図 7 に相対価値分析として示した。不動産に関する本モデルの評価は、私募での評価と資本市場での評価の中間にあり、不動産に関するフェアな評価といえる。図 7 において相対価値がプラスであることは、過去 10 年間における非平滑化リターン（私募で取引される場合の不動産の実勢価格リターン）が不動産のフェアなリターンをアウトパフォーマンスして不動産市場内では割高な状態にあることを意味する。図 7 を見ると、割高・割安の程度は何れも概ね年率 2%程度以内であり、過去 10 年間という長期の期間においては、不動産の私募での評価と資本市場での評価が収斂することが伺える。

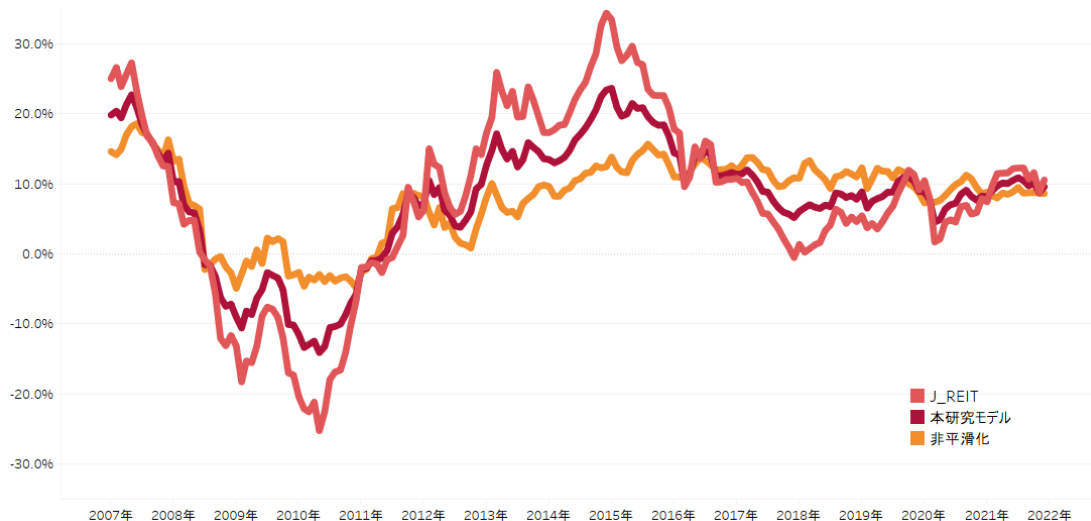
【図7：相対価値比較（非平滑化リターンー本研究モデルリターン、120カ月ローリング）】



（出所：ARES データより筆者ら作成）

同様に、J-REITのリターン、本研究モデルのリターン、非平滑化リターンに関して、過去3年間の月次リターンを年率換算して平均を取りローリングしたものを図8に示した。平均の推移を見ると、その変動は、大きい順に、「J-REIT」(-25%~35%)、「本研究モデル」(-14%~24%)、「非平滑化」(-5%~15%)である。過去10年間の場合と比較して、変動の大きさの順位や式(13)との整合性に関しては変わりないが、リターンの変動幅の水準が大きく異なる。これを反映して、図9に示す相対価値分析では、割高もしくは割安の程度が何れも年率11%程度にまで及ぶ。つまり、過去3年間という短期の期間においては、不動産の私募での評価と資本市場での評価が大きく乖離しうることが確認される。

【図8：月次リターン（36カ月ローリング、年率換算）】



（出所：FactSet、ARES のデータより筆者ら作成）

【図9：相対価値比較（非平滑化リターンー本研究モデルリターン、36 カ月ローリング）】



（出所：ARES データより筆者ら作成）

## 4. ポートフォリオ選択に関する実証分析

### 4.1 データ、分析の設定と手法

シャープ・レシオ最大化に基づくポートフォリオ選択の実証分析に用いるデータについては、不動産に関連するものは第3節の3.2.1 データにおいて記した通りである。伝統的4資産に関しては、国内債券：野村BPI、国内株式：TOPIX、外国債券：WGBI、外国株式：ACWI ex Japan、の各インデックスの月次リターンを採用する。

シャープ・レシオの定義は、本来は「ポートフォリオのリターンから無リスク金利を差し引いたものをポートフォリオの標準偏差で除した値」であるが、分析対象期間に短期金利がマイナスとなる時期が長く含まれるため、ここでは、無リスク金利を常に0%とにおいて求めた値を「シャープ・レシオ」と呼ぶこととする。分析の対象となるポートフォリオは、(1)伝統的4資産（国内債券、国内株式、外国債券、外国株式）にJ-REITのみを加えたポートフォリオ、(2)伝統的4資産にJ-REITと元ARESリターンに基づくリスク・リターン特性を想定した私募不動産、(3)伝統的4資産にJ-REITと非平滑化リターンに基づくリスク・リターン特性を想定した私募不動産、(4)伝統的4資産にJ-REITと本研究モデルのリターンに基づくリスク・リターン特性を想定した私募不動産、の4通りである。

このような4通りのポートフォリオを分析対象とする理由は、不動産を伝統的4資産に含めてポートフォリオの最適化を行う際に、不動産のリスクを単純に元ARESリターンから計算すると、元ARESリターンに内在する時系列相関のためにリスクが過小評価されて、不動産が最適ポートフォリオ（最適化されたポートフォリオをいう。以下同じ。）に過剰に組み込まれるといった実務上の問題が生じるからである。まず、このような問題点を、ポートフォリオ(2)における最適ポートフォリオに基づき確認する。次に、既存研究においては、元ARESリターンを非平滑化して得られる非平滑化リターンの標準偏差を不動産のリスクと捉えることで、先に指摘した問題をある程度まで解決しており、この点をポートフォリオ(3)における最適ポートフォリオに基づき確認する。

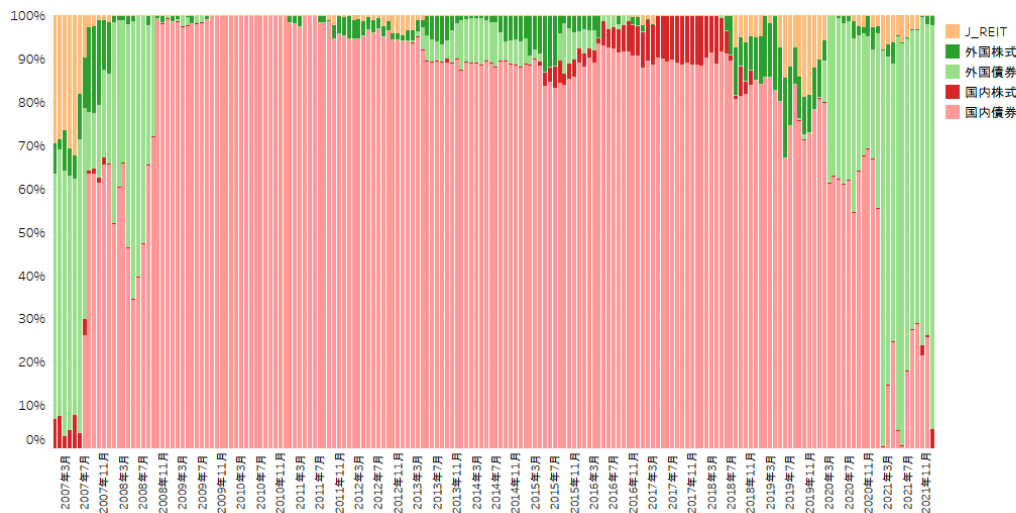
本研究では、不動産に関して、非平滑化リターンにJ-REITから得られるマーケットのデータも加味した売買価格リターンのリスクを算出する方法を提案している。このようなリスクの計量に関する工夫

によって、最適ポートフォリオに占める不動産の割合がどの程度まで変わるかについて、ポートフォリオ(4)における最適ポートフォリオに基づき確認する。ポートフォリオ(1)は、伝統的 4 資産に J-REIT のみを加えたポートフォリオなので、ポートフォリオ(4)と比較すれば、J-REIT のリターンと売買価格リターンとのリスク特性の相違、なかでも、伝統的 4 資産との相関係数の相違が最適ポートフォリオに占める不動産の割合に与える影響を把握することができる。

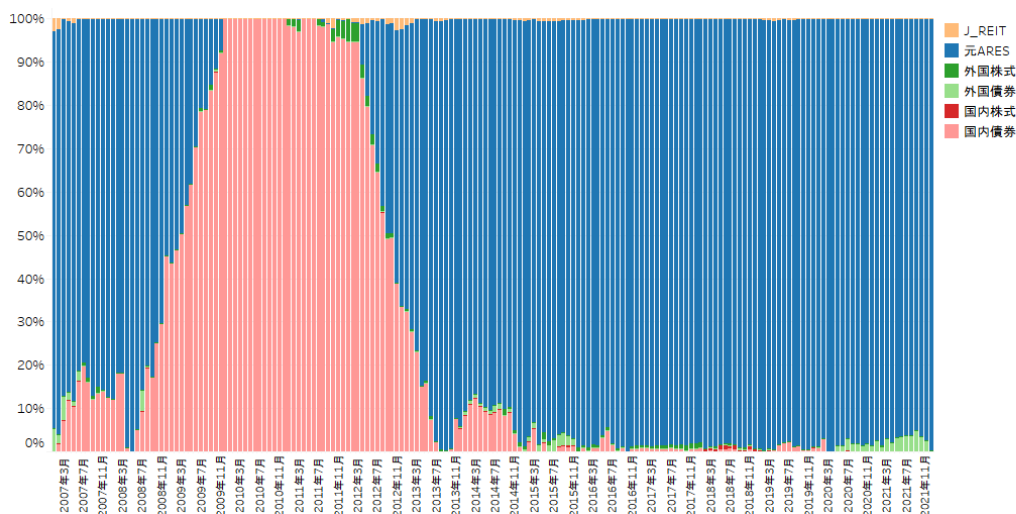
#### 4.2 分析結果とその考察

ポートフォリオ(1)からポートフォリオ(4)において、過去 3 年間の月次リターンを用いたリスク・リターン特性に基づきシャープ・レシオの最大化について、ローリングを行うことにより試みた。最適ポートフォリオに占める各資産の割合（以下、「最適ウェイト」という。）の推移を、ポートフォリオ(1)からポートフォリオ(4)の順に図 10～図 13 に示した。ポートフォリオ(2)の最適ウェイトを示す図 11 は、2009 年から 2013 年の期間を除いては、殆ど全ての資産を不動産とするのが最適であることを意味しており、先に述べた問題点が確認される。

【図 10：最適ウェイト（伝統的資産+J-REIT、36 カ月ローリング）】

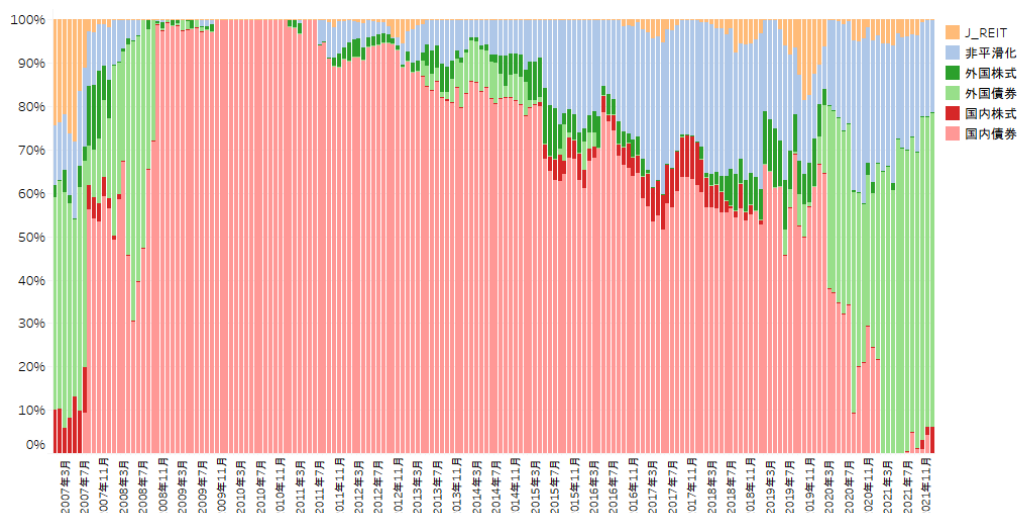


【図 11：最適ウェイト（伝統的資産+J-REIT+元ARES、36 カ月ローリング）】

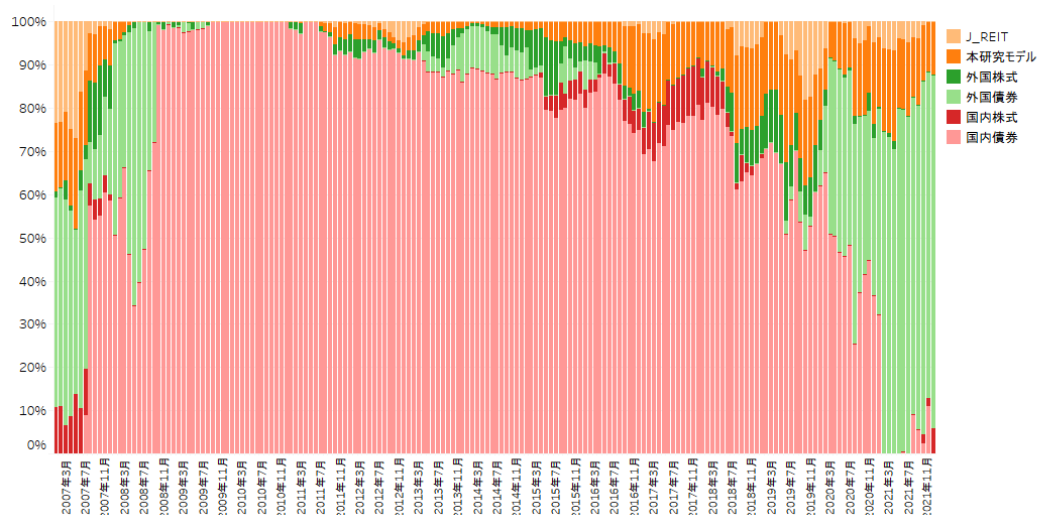


（出所：図 10、図 11 とともに FactSet、ARES のデータより筆者ら作成）

【図 1 2：最適ウェイト（伝統的資産+J-REIT+非平滑化、36 カ月ローリング）】



【図 1 3：最適ウェイト（伝統的資産+J-REIT+本研究モデル、36 カ月ローリング）】



（出所：図 12、図 13 とともに FactSet、ARES のデータより筆者ら作成）

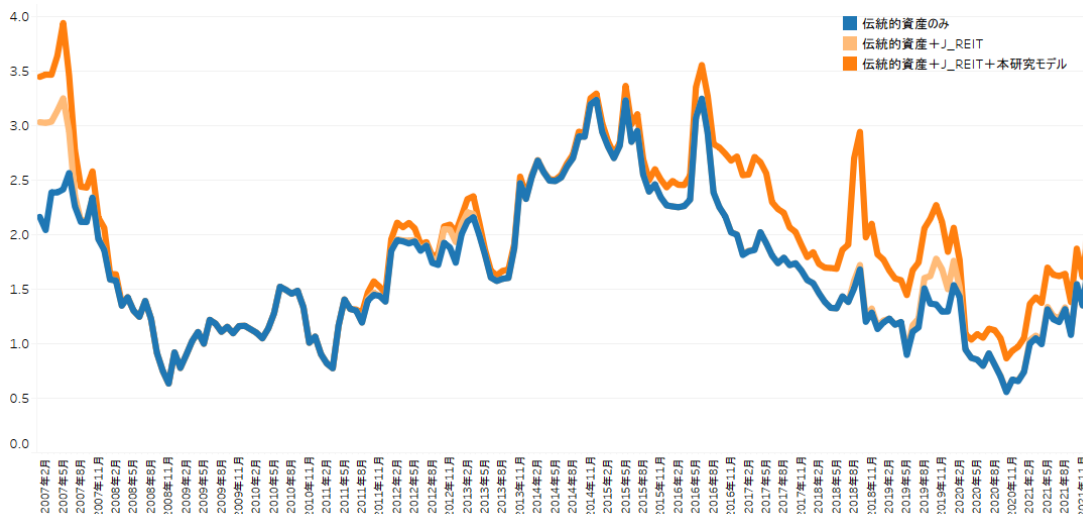
ポートフォリオ(3)の最適ウェイトを示す図 12 を詳細に検討する。2008 年 11 月から 2011 年 5 月の期間における最適ポートフォリオは、殆ど全ての資産を国内債券で保有するというものであった。2011 年 6 月以降は、ゼロ金利政策の影響から国内債券の利回りが低下するに従って、最適ポートフォリオに占める国内債券のウェイトは徐々に低下していき、遂に 2020 年 12 月以降には概ね 0%となる。2011 年 6 月から 2019 年 12 月までの間において、国内債券の代わりに、国内株式、外国債券、外国株式などの資産がしばしば最適なポートフォリオにおける資産として選ばれるものの、そのウェイトは数%からせいぜい 10%程度に留まる。この期間において、一貫してウェイトを増やしたのが、非平滑化リターンに基づくリスク・リターン特性を有する私募不動産であり、2018 年には極僅かなウェイトを持つ J-REIT と合わせると最適ポートフォリオ全体の 40%程度にまで及び、2020 年以降はウェイトを減らしていくものの、常に 20%以上のウェイトを維持している。2020 年以降に大幅にウェイトを増やしたのは、FED による量的緩和の影響を享受した外国債券である。また、パリバ・ショックやリーマンショックなどの時期に該当する 2007 年から 2008 年においても外国債券のウェイトが比較的大きかったことも読み取れる。図 11 と図 12 との比較から、私募不動産をポートフォリオに含めて最適化を行う際に、元 ARES

リターンを非平滑化した非平滑化リターンに基づくリスク・リターン特性を用いることは相応に効果的であることがわかる。

本研究モデルに基づくリスク・リターン特性の最適なポートフォリオへの影響を検討するため、ポートフォリオ(4)の最適ウェイトを示す図 13 を図 12 と比較する。図 13 に示す最適ウェイトの推移は、図 12 のものと概ね類似している。より詳細に比較すると、図 13 においても、2011 年 6 月から 2019 年 12 月までの間において私募不動産はウェイトを増やしているが、図 12 で確認した私募不動産のウェイトと比較すると 10%~15%程度少ないウェイトで私募不動産が最適ポートフォリオに組み込まれていることがわかる。この理由として、本研究モデルによる私募不動産のリスクが、日々市場で売買されて決まる J-REIT のリターンのデータも反映させて推定されたものであるため、非平滑化リターンに基づくリスクよりも通常は高いことが考えられる。

ここで、J-REIT や私募不動産を伝統的 4 資産に加えることで、最適ポートフォリオのシャープ・レシオがどの程度向上するかについて確認する。図 14 には、ポートフォリオ(1)、ポートフォリオ(4)、伝統的 4 資産のみから成るポートフォリオ(5)の 3 通りのポートフォリオに関して、シャープ・レシオの最大化について、ローリングを行うことにより試み、最適ポートフォリオのシャープ・レシオを時系列で示した。図 14 を見ると、ポートフォリオ(1)とポートフォリオ(5)のシャープ・レシオが、2007 年と 2019 年の一部の期間を除いては概ね重なっていることが分かる。また、2015 年 7 月までの期間では、2007 年を除けば、ポートフォリオ(4)のシャープ・レシオも他の 2 つのものに概ね同じである。しかし、ポートフォリオ(4)のシャープ・レシオは、2015 年 8 月以降は、他の 2 つのポートフォリオよりもシャープ・レシオが 0.5 程度から 1.5 程度まで高く推移している。このことから、伝統的 4 資産に J-REIT を加えてもシャープ・レシオの改善は殆ど望めないが、私募不動産を加えれば、期間によってはシャープ・レシオの向上が見込まれる。

【図 14：シャープ・レシオ（36 カ月ローリング）】

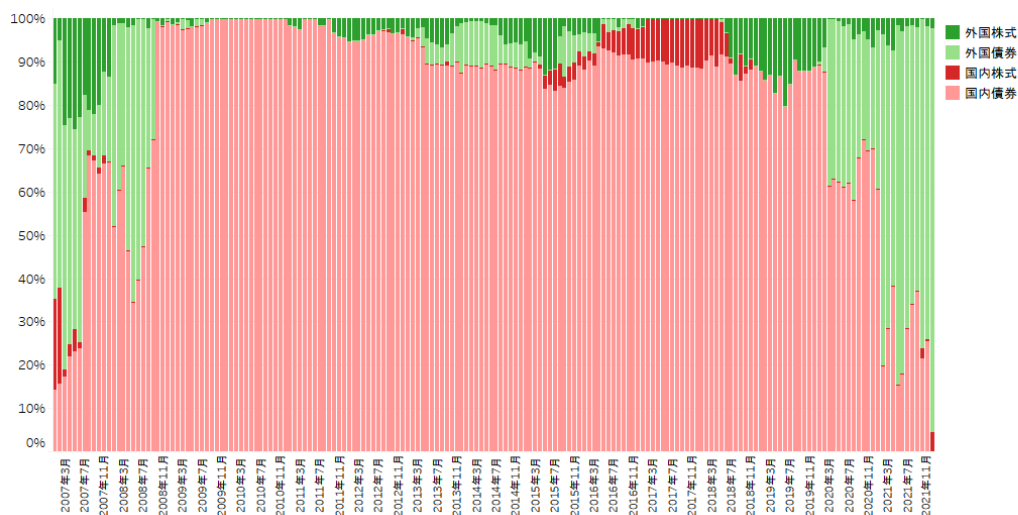


(出所：FactSet、ARES のデータより筆者ら作成)

この背景としては、私募不動産のリターンと伝統的 4 資産のリターンとの相関係数が低いことや、通常はこれらの資産のリスクが J-REIT のものよりも少し小さいことが考えられる。ここで、伝統的 4 資産のみの最適ポートフォリオを図 15 に示す。図 15 を詳細に見ると、図 10 に示したポートフォリオ(1)

における J-REIT のウェイトが 2007 年と 2019 年の一部の期間において外国株式に置き換わっている以外は殆ど同じであることが分かる。つまり、シャープ・レシオ最大化において、J-REIT のリスク・リターン特性は、外国株式のものに近いが、外国株式のパフォーマンスを上回る期間はそれほど多くないことが伺える。

【図 15：最適ウェイト（伝統的資産のみ、36 カ月ローリング）】



(出所：FactSet、ARES のデータより筆者ら作成)

## 5. まとめと今後の課題

本研究では、「不動産鑑定士が想定する実勢価格が、必ずしも、実際に売買される価格と一致するとは限らない。よって、非平滑化されたリターンそのものを私募不動産の売買価格ベースのリターンと看做すわけにはいかないのでは？」という問題意識のもと、J-REIT の価格が実質的な不動産の所有権の移転を伴う実際に売買される価格であることに着目し、非平滑化されたリターンのデータと J-REIT のリターンのデータの両方を利用する形で、売買価格ベースでのリターンとリスクのモデル化を本研究モデルとして提案した。また、本研究モデルの特徴を把握するための実証分析や、J-REIT と私募不動産（本研究モデルのリターンに基づくリスク・リターン特性を有しているもの）を伝統的 4 資産に含めたポートフォリオについて、シャープ・レシオ最大化に基づくポートフォリオ選択の実証分析を行った。実証分析結果から、本研究モデルを用いることで、私募不動産を伝統 4 資産に含めても私募不動産が過度に含まれることのないポートフォリオが構築可能であること、シャープ・レシオ最大化においては、J-REIT よりも私募不動産の方が最適ポートフォリオに含まれる期間が多く、効率的なポートフォリオ構築への寄与が大きいこと、などが分かった。

今後の課題として、主に、次の 3 つが挙げられる。

第 1 に、実務上の要請である「長期的に年金積立金の実質的な運用利回り（年金積立金の運用利回りから名目賃金上昇率を差し引いたもの）1.7%を最低限のリスクで確保すること」を条件とする最適化において本研究モデルがどの程度まで有効であるかを確認することが挙げられる。

第 2 に、本研究モデルの利用法に関する課題である。節 4 の実証分析においては、恣意性を排除した分析とするために、私募不動産のリターンとして本研究モデルで提案したフェアなリターンを用いた。しかし、節 3.3.3 で確認したように、短期的には、非平滑化リターン（不動産の私募での評価）と J-REIT



リターン（不動産の資本市場での評価）が大きく乖離し、同時に、両リターンはフェアな水準からも大きく乖離しうる。両リターンがフェアな水準に収斂するまでの期間とその過程で得られる超過損益をどのように計量するかが課題となる。

第3に、第2の課題と関連するが、本研究モデルをどの様にして Black-Litterman モデルへ接続するのかという課題である。既存研究にあるように私募不動産のリターンのモデル化として非平滑化リターンを利用するであれば、i.i.d.の枠組みに留まることから、短期の最適化が長期の最適化と同等であるため、直接的に Black-Litterman モデルの利用が可能となる。しかし、本研究モデルを利用する場合には、投資ホライズンを表すパラメータを指定する必要があるため、このようなパラメータの適切な設定が課題となる。

## 付録

式(13)～式(15)の導出

記法を簡便にするために、不動産鑑定士が想定する実勢価格を反映したリターン（非平滑化リターン） $R_t$ の時系列データを $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 、J-REIT Index リターン $R_t^J$ の時系列データを $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ とし、パラメータセットを $\boldsymbol{\theta} = (\mu, \sigma^2, \rho)$ とする。データセット $(x_i, y_i)$ における私募不動産リターン $R_t^P$ の密度関数は、

$$f(x_i, y_i, \boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} Q(x_i, y_i)\right\}, \quad (\text{A-1-1})$$

$$Q(x_i, y_i) = \frac{(x_i - \mu)^2}{\sigma^2} - 2\rho \frac{(x_i - \mu)(y_i - \mu)}{\sigma^2} + \frac{(y_i - \mu)^2}{\sigma^2} \quad (\text{A-1-2})$$

なので、時系列データセット $\mathbf{x}$ 、 $\mathbf{y}$ に関する密度関数 $L(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\theta})$ と対数密度関数 $l(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\theta})$ は、

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^n f(x_i, y_i, \boldsymbol{\theta}) \quad (\text{A-3})$$

$$l(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}) = \log L(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\theta})$$

$$\begin{aligned} &= -n \log 2\pi - n \log(\sigma^2) - \frac{1}{2} n \log(1 - \rho^2) - \frac{1}{2(1-\rho^2)\sigma^2} \left\{ \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 - \right. \\ &\quad \left. 2\rho \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)(y_i - \mu) + \sum_{i=1}^n (y_i - \mu)^2 \right\} \end{aligned} \quad (\text{A-4})$$

対数密度関数 $l(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\theta})$ を $\mu, \sigma^2, \rho$ の各々で偏微分して、0に等しいとすることで、これらの極値を求めるための3つの方程式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial \mu} &= -\frac{1}{2(1-\rho^2)\sigma^2} \left\{ -\sum_{i=1}^n 2(x_i - \mu) - 2\rho \sum_{i=1}^n \{-(y_i - \mu) - (x_i - \mu)\} - \sum_{i=1}^n 2(y_i - \mu) \right\} \\ &= \frac{1}{(1-\rho^2)\sigma^2} \left\{ \sum_{i=1}^n (x_i - \mu) - \rho \sum_{i=1}^n \{x_i + y_i - 2\mu\} + \sum_{i=1}^n (y_i - \mu) \right\} = 0 \end{aligned} \quad (\text{A-5})$$

$$\frac{\partial l}{\partial (\sigma^2)} = -n \frac{1}{(\sigma^2)} + \frac{1}{2(1-\rho^2)(\sigma^2)^2} \left\{ \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 - 2\rho \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)(y_i - \mu) + \sum_{i=1}^n (y_i - \mu)^2 \right\} = 0 \quad (\text{A-6})$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial l}{\partial \rho} &= -\frac{1}{2}n \frac{-2\rho}{(1-\rho^2)} - \frac{-(-2\rho)}{2\sigma^2(1-\rho^2)^2} \left\{ \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 - 2\rho \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)(y_i - \mu) + \sum_{i=1}^n (y_i - \mu)^2 \right\} \\
&\quad - \frac{1}{2(1-\rho^2)\sigma^2} \left\{ -2\rho \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)(y_i - \mu) \right\} \\
&= \frac{n\rho}{(1-\rho^2)} - \frac{\rho}{\sigma^2(1-\rho^2)^2} \{ \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 - 2\rho \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)(y_i - \mu) + \sum_{i=1}^n (y_i - \mu)^2 \} - \\
&\quad \frac{1}{2(1-\rho^2)\sigma^2} \{ -2 \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)(y_i - \mu) \} = 0
\end{aligned} \tag{A-7}$$

式(A-5)に $(1-\rho^2)\sigma^2$ を掛けて $n$ で割ると、

$$\frac{1}{n} \{ \sum_{i=1}^n (x_i - \mu) - \rho \sum_{i=1}^n \{ x_i + y_i - 2\mu \} + \sum_{i=1}^n (y_i - \mu) \} = 0$$

を得る。 $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ 、 $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$ と置くと、上式は、

$$\bar{x} - \mu - \rho(\bar{x} + \bar{y} - 2\mu) + \bar{y} - \mu = 0$$

となり、整理すると、

$$\mu = \frac{1}{2}(\bar{x} + \bar{y}) \tag{A-8}$$

を得る。式(A-8)は、式(13)と同じである。

次に、式(A-6)の $\{\cdot\}$ の中身を整理する。

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 - 2\rho \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)(y_i - \mu) + \sum_{i=1}^n (y_i - \mu)^2 \\
&= \sum_{i=1}^n \{ (x_i - \bar{x}) + (\bar{x} - \mu) \}^2 - 2\rho \sum_{i=1}^n \{ (x_i - \bar{x}) + (\bar{x} - \mu) \} \{ (y_i - \bar{y}) + (\bar{y} - \mu) \} + \sum_{i=1}^n \{ (y_i - \bar{y}) + (\bar{y} - \mu) \}^2 \\
&= \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + 2(\bar{x} - \mu) \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) + n(\bar{x} - \mu)^2 - 2\rho \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) - 2\rho \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(\bar{y} - \mu) \\
&\quad - 2\rho \sum_{i=1}^n (\bar{x} - \mu)(y_i - \bar{y}) - 2\rho n(\bar{x} - \mu)(\bar{y} - \mu) + \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 + 2(\bar{y} - \mu) \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}) \\
&\quad + n(\bar{y} - \mu)^2
\end{aligned}$$

これを用いて、式(A-6)の $\{\cdot\}$ を $n$ で割った $\frac{1}{n}\{\cdot\}$ を式(A-8)を用いて整理する。

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n} \{ \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 - 2\rho \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)(y_i - \mu) + \sum_{i=1}^n (y_i - \mu)^2 \} \\
&= \sigma_x^2 + (\bar{x} - \mu)^2 - 2\rho\rho_{x,y}\sigma_x\sigma_y - 2\rho(\bar{x} - \mu)(\bar{y} - \mu) + \sigma_y^2 + (\bar{y} - \mu)^2 \\
&= \sigma_x^2 + \left(\frac{\bar{x}-\bar{y}}{2}\right)^2 - 2\rho\rho_{x,y}\sigma_x\sigma_y - 2\rho\left(\frac{\bar{x}-\bar{y}}{2}\right)\left(\frac{\bar{y}-\bar{x}}{2}\right) + \sigma_y^2 + \left(\frac{\bar{y}-\bar{x}}{2}\right)^2 \\
&= \sigma_x^2 - 2\rho\rho_{x,y}\sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2 + \frac{1}{2}(1+\rho)(\bar{x} - \bar{y})^2
\end{aligned} \tag{A-9}$$

上記の式(A-9)を導出する過程で、

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)(y_i - \mu) = \rho_{x,y}\sigma_x\sigma_y - \frac{1}{4}(\bar{x} - \bar{y})^2 \tag{A-10}$$

も得られる。

式(A-6)の両辺を $\frac{\sigma^2}{n}$ 倍して、式(A-9)を代入すると、

$$-1 + \frac{1}{2(1-\rho^2)\sigma^2} \left\{ \sigma_x^2 - 2\rho\rho_{x,y}\sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2 + \frac{1}{2}(1+\rho)(\bar{x} - \bar{y})^2 \right\} = 0$$

となり、これを整理して、

$$\sigma^2 = \frac{1}{2(1-\rho^2)} \left\{ \sigma_x^2 - 2\rho\rho_{x,y}\sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2 + \frac{1}{2}(1+\rho)(\bar{x} - \bar{y})^2 \right\} \tag{A-11}$$

を得る。

また、(A-7)の両辺を $\frac{(1-\rho^2)}{n\rho}$ 倍して、式(A-9)、式(A-10)を代入すると、

$$1 - \frac{1}{(1-\rho^2)\sigma^2} \left\{ \sigma_x^2 - 2\rho\rho_{x,y}\sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2 + \frac{1}{2}(1+\rho)(\bar{x}-\bar{y})^2 \right\} + \frac{1}{\rho\sigma^2} \left\{ \rho_{x,y}\sigma_x\sigma_y - \frac{1}{4}(\bar{x}-\bar{y})^2 \right\} = 0$$

を得る。左辺の第二項が式(A-11)を用いると2であることを用いて整理すると、

$$\rho\sigma^2 = \rho_{x,y}\sigma_x\sigma_y - \frac{1}{4}(\bar{x}-\bar{y})^2 \quad (\text{A-12})$$

を得る。

ここで、式(A-11)の両辺に $2(1-\rho^2)$ を掛けて、右辺を整理したうえで式(A-12)を代入すると、

$$2(1-\rho^2)\sigma^2 = \sigma_x^2 - 2\rho\rho_{x,y}\sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2 + \frac{1}{2}(1+\rho)(\bar{x}-\bar{y})^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \frac{1}{2}(\bar{x}-\bar{y})^2 -$$

$$2\rho(\rho_{x,y}\sigma_x\sigma_y - \frac{1}{4}(\bar{x}-\bar{y})^2) = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \frac{1}{2}(\bar{x}-\bar{y})^2 - 2\rho^2\sigma^2$$

となり、これを整理すると、

$$\sigma^2 = \frac{1}{2}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2) + \frac{1}{4}(\bar{x}-\bar{y})^2 \quad (\text{A-13})$$

を得る。式(A-13)は、式(14)に同じである。これを式(A-12)に代入して整理すると、

$$\rho = \frac{\rho_{x,y}\sigma_x\sigma_y - \frac{1}{4}(\bar{x}-\bar{y})^2}{\frac{1}{2}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2) + \frac{1}{4}(\bar{x}-\bar{y})^2} \quad (\text{A-14})$$

を得る。式(A-14)は、式(15)に同じである。

## 参考文献

- Geltner, David (1993) “Estimating Market Values from Appraised Values without Assuming an Efficient Market” . Journal of Real Estate Research 8 (3) pp.325-345.
- Geltner, David (1991) “Smoothing in Appraisal-Based Returns” . Journal of Real Estate Finance and Economics 4:327-345.
- Gentry, W. M., Jones, C. M. and C. J. Mayer (2003) “Deviations Between Stock Price and Fundamental Value for Real Estate Investment Trusts,” Discussion Paper, Columbia Business School.
- Getmansky, Milia, Andrew W. Lo, and Igor Makarov (2004) “An econometric model of serial correlation and illiquidity in hedge fund returns.” , Journal of Financial Economics, 74 (3) pp.529-609.
- Spencer, C., S. G., Andrei and R. Andrea (2020) “Unsmoothing Returns of Illiquid Funds,” Kenan Institute of Private Enterprise Research Paper No. 20-05, USC Lusk Center of Real Estate Working Paper Series, Available at SSRN: <https://ssrn.com/abstract=3544854> or <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.3544854>, November 25, 2020.
- 川口有一郎 (2004) 「不動産投資の現状と課題—代替資産から新たな基本資産へ—」『証券アナリストジャーナル』 2004. 11, pp.6-19.
- 島田・宮崎・大石(2021)「J-REIT と伝統的資産との統合リスク管理 に向けた分析」『GPIF ワーキングペーパー』
- 田邊信之 (2022) 「不動産証券化市場の歩みと今後の課題」『証券アナリストジャーナル』 2022. 7, pp. 6-18.

---

徳島勝幸（2022）「不動産投資はオルタナティブ投資か？」『証券アナリストジャーナル』 2022. 7, pp. 19-28.

年金積立金管理運用独立行政法人（2022）『2021 年度 業務概況書』